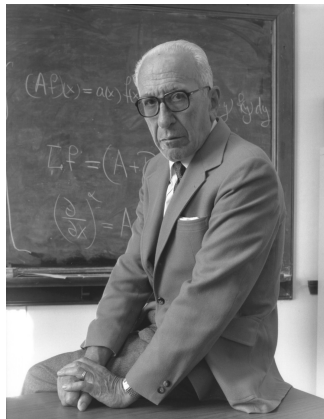


LE PROBLÈME INVERSE DE LA CONDUCTIVITÉ D'ALBERTO CALDERÓN

DAVID DOS SANTOS FERREIRA

RÉSUMÉ. Ces notes sont consacrées à l'étude d'un problème inverse posé par Alberto Calderón [4] alors qu'il travaillait comme ingénieur pour la compagnie nationale pétrolière argentine Yacimientos Petrolíferos Fiscales. La question est de savoir si l'on peut déterminer la conductivité électrique d'un corps en faisant simplement des mesures de tension et d'intensité à la périphérie. La traduction mathématique de cette question est celle de la détermination d'une conductivité électrique dans une équation de type divergence à partir de l'opérateur Dirichlet-à-Neumann. Nous présenterons les solutions données par John Sylvester et Gunther Uhlmann [10] dans le cas des dimensions supérieures à 3 et de Bukhgeim [3] dans le cas bidimensionnel.



Alberto Calderón (1920-1998)

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Un problème de densité	5
3. Inégalités de Carleman	10
4. Cas de la dimension $n \geq 3$	16
5. Phase quadratique et cas bidimensionnel	20
Références	25

1. INTRODUCTION

Alberto Calderón est l'un des grands analystes du vingtième siècle. Avant d'entamer sa carrière académique à l'université de Chicago et de préparer une thèse sous la direction d'Antoni Zygmund, Calderón a travaillé comme ingénieur pour la compagnie pétrolière Yacimientos Petrolíferos Fiscales en Argentine. C'est à cette occasion, dans les années 1950, qu'il s'intéresse au problème inverse de la conductivité. Une technique commune de prospection pétrolière mise au point par les frères Schlumberger consiste à mesurer la conductivité électrique du sol à l'aide d'électrodes plantées dans le sol afin de déterminer la nature du terrain et repérer d'éventuelles poches de pétroles. Calderón se pose la question de savoir s'il est possible de déterminer la conductivité électrique d'un corps en faisant des mesures de tension et d'intensité à la périphérie. Calderón abandonne sa carrière d'ingénieur où il ne se sentait pas épanoui pour devenir mathématicien et entamer une carrière académique. Il ne rédige une note [4] sur le sujet que plusieurs années après (1980) et étudie en particulier le problème linéarisé. Le problème inverse de la conductivité se pose également en imagerie médicale où la tomographie par impédance électrique consiste à imager l'intérieur du corps humain à l'aide de la conductivité interne — qui varie selon la nature des tissus et des cellules — déterminée en faisant des mesures grâce à des électrodes fixées sur la peau. Cette méthode d'imagerie est en particulier utilisée dans la détection des cancers en conjonction avec d'autres méthodes.

La formulation mathématique de la question posée par Calderón est la suivante : la conductivité sur un corps $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ borné est modélisée par une fonction positive γ que nous supposons de classe C^2 . La tension électrique $u \in H^1(\Omega)$ du corps soumis à une intensité f à sa périphérie obéit à l'équation de la conductivité

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \end{cases} .$$

La mesure de la correspondance tension / intensité (current-to-voltage map) à la périphérie est modélisée par l'application Dirichlet-à-Neumann

$$\begin{aligned} \Lambda_\gamma : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ f &\mapsto \gamma \partial_\nu u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

où ν désigne la normale extérieure à Ω (que l'on suppose de bord lisse). La question posée par Calderón¹ est celle de la détermination de la conductivité γ à partir de Λ_γ . Cette question se décompose en une série de questions complexes :

1. l'identifiabilité : l'injectivité de $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$,
2. la stabilité : la variation des conductivités $\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ peut-elle être quantifiée par la variation des mesures $\|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{L(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))}$?
3. les algorithmes de reconstruction,
4. les calculs numériques.

1. Dans la note [4], la conductivité est seulement supposée mesurable et bornée et telle que $0 < c \leq \gamma(x)$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Nous nous intéresserons à la première

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 ?$$

Il est commode de changer d'équation et de travailler plutôt sur l'équation de Schrödinger avec potentiel électrique. Le lien peut être établi de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\gamma \nabla u) &= \gamma \Delta u + \nabla \gamma \cdot \nabla u \\ &= \sqrt{\gamma} \left(\Delta(\sqrt{\gamma} u) - \frac{\Delta(\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{\gamma} u \right) \\ &= -\sqrt{\gamma} (-\Delta + q)(\sqrt{\gamma} u) \end{aligned}$$

avec $q = \Delta(\sqrt{\gamma})/\sqrt{\gamma}$. Cette réduction de l'équation n'est possible que si γ est au moins deux fois dérivable.

Nous nous intéresserons donc plutôt au problème inverse correspondant sur l'équation de Schrödinger (qui est plus simple à manier car elle ne comporte pas de terme d'ordre 1). Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n à bord lisse en dimension $n \geq 2$. Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ un potentiel qui vérifie l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1. *0 n'est pas une valeur propre de l'opérateur $-\Delta + q$ avec domaine $H_0^1(\Omega)$, i.e. si*

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

alors $u = 0$.

Dans ce cas, le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

est bien posé pour tout $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$: il existe une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

et l'application Dirichlet-à-Neumann

$$\begin{aligned} \Lambda_q : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ f &\mapsto \partial_\nu u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

où ν désigne la normale extérieure à Ω est bien définie (voir section 2 pour une définition plus précise). Nous faisons l'abus de notation consistant à utiliser la même notation pour les applications Dirichlet-à-Neumann associées à l'équation de Schrödinger et à l'équation de la conductivité.

Le but de ce cours est de démontrer les deux théorèmes suivants résolvant le problème de l'identifiabilité dus à John Sylvester et Gunther Uhlmann [10] en dimensions supérieures à 3 et à Alexander Bukhgeim [3] en dimension 2.

Théorème (Sylvester & Uhlmann). *Soit Ω un ouvert borné à bord lisse en dimension $n \geq 3$, soit $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ deux potentiels vérifiant l'hypothèse 1. Si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ alors $q_1 = q_2$.*

Théorème (Bukhgeim). *Soit Ω un ouvert borné à bord lisse ce \mathbf{C} , soit $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ deux potentiels vérifiant l'hypothèse 1. Si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ alors $q_1 = q_2$.*

Remarque 1. Emeli Blåsten, Oleg Imanuvilov et Masahiro Yamamoto [2] apportent des compléments substantiels dans le cas d'un potentiel peu régulier à la preuve imaginée par Bukhgeim.

Du lien entre l'équation de la conductivité et celle de Schrödinger mise en lumière auparavant, on déduit le lien entre les applications Dirichlets-à-Neuman suivant

$$\Lambda_q f = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Lambda_\gamma (\gamma^{-1/2} f) + \frac{\partial_\nu \gamma}{2\gamma} f, \quad q = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma})}{\sqrt{\gamma}},$$

et des deux théorèmes précédents, on peut en déduire le corollaire suivant sur le problème inverse de la conductivité de Calderón.

Corollaire 2. *Soit Ω un ouvert borné à bord régulier de \mathbf{R}^n avec $n \geq 2$, soient $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbf{R})$ deux fonctions à valeurs strictement positives. Si γ_1 et γ_2 coïncident au bord ainsi que leurs dérivées normales $\partial_\nu \gamma_1$ et $\partial_\nu \gamma_2$ et si*

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$$

alors $\gamma_1 = \gamma_2$.

Démonstration. Si on a

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}, \quad \gamma_1|_{\partial\Omega} = \gamma_2|_{\partial\Omega}, \quad \partial_\nu \gamma_1|_{\partial\Omega} = \partial_\nu \gamma_2|_{\partial\Omega}$$

alors $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ avec potentiels $q_1 = \Delta(\sqrt{\gamma_1})/\sqrt{\gamma_1}$ et $q_2 = \Delta(\sqrt{\gamma_2})/\sqrt{\gamma_2}$. Des théorèmes de Sylvester et Uhlmann en dimension $n \geq 3$ et de Bukhgeim en dimension $n = 2$, on tire $q_1 = q_2$ soit

$$\frac{\Delta(\sqrt{\gamma_1})}{\sqrt{\gamma_1}} = \frac{\Delta(\sqrt{\gamma_2})}{\sqrt{\gamma_2}}$$

autrement dit $\sqrt{\gamma_1}$ et $\sqrt{\gamma_2}1$ sont toutes deux solutions du problème de Dirichlet suivant²

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u = 0 \text{ sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \sqrt{\gamma_1}|_{\partial\Omega} \end{cases}$$

et donc $\gamma_1 = \gamma_2$. □

Remarque 3. Le fait que les γ_1 et γ_2 et leurs dérivées normales coïncident au bord n'est pas une restriction car cela se déduit directement de l'égalité $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ par un résultat de Robert Kohn et de Michaël Vogelius [7] connu sous le nom de « détermination au bord » et permettant d'obtenir l'égalité des développements de Taylor des conductivités au bord et donc d'attaquer le cas de conductivités analytiques.

2. Ce qui équivaut au fait que $v = \sqrt{\gamma_2}/\sqrt{\gamma_1}$ et 1 sont toutes deux solutions de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\gamma_1 \nabla u) = 0 \text{ sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 1 \end{cases} .$$

En dimension 2, Adrian Nachman [8] met au point une méthode permettant de résoudre le problème inverse directement sur l'équation de la conductivité. Le problème inverse original posé par Calderón pour des conductivités $L^\infty(\Omega)$ est résolu pas Kari Astala et Lassi Päiväranta [1] et est toujours ouvert en dimension supérieures à 3. Les meilleurs résultats d'identifiabilité en terme de régularité sont pour l'instant ceux de Boaz Haberman [3] et de Pedro Caro et Keith Rogers [5] pour des conductivités lipschitziennes.

2. UN PROBLÈME DE DENSITÉ

Notre première tâche est de se débarrasser des conditions aux bords de type Dirichlet et d'établir une identité permettant d'obtenir des informations sur la différence des potentiels $q_1 - q_2 \in L^\infty(\Omega)$. Pour cela, nous aurons besoin de la formule de Green.

Théorème 4 (Formule de Green). *Soit Ω un ouvert à bord lisse de \mathbf{R}^n , soit $u \in H^2(\Omega)$ et soit $v \in H^1(\Omega)$ alors*

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u v \, dS$$

où $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}$ est la dérivée normale de u , ν étant la normale extérieure au bord de Ω . Si de plus $v \in H^2(\Omega)$ alors

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dx - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u v \, dS - \int_{\partial\Omega} u \partial_\nu v \, dS.$$

Si u_1 et u_2 sont deux solutions dans $H^2(\Omega)$ de

$$\begin{cases} -\Delta u_j + q_j u_j = 0 \\ u_j|_{\partial\Omega} = f_j \end{cases}$$

alors la formule de Green donne

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx &= \int_{\Omega} \Delta u_1 u_2 \, dx - \int_{\Omega} u_1 \Delta u_2 \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_1 f_2 \, dS - \int_{\partial\Omega} f_1 \partial_\nu u_2 \, dS. \end{aligned}$$

Si l'on choisit $q_1 = q_2$ on en déduit

$$\int_{\partial\Omega} \Lambda_{q_2} f_1 f_2 \, dS = \int_{\partial\Omega} f_1 \Lambda_{q_2} f_2 \, dS.$$

et donc finalement en revenant à l'identité découlant de la formule de Green

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx = \int_{\partial\Omega} (\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}) f_1 f_2 \, dS.$$

On voit donc que si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ alors

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx = 0$$

pour toutes solutions $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ des équations de Schrödinger avec potentiels q_1, q_2 . Le cas moins régulier demande quelques ajustements : nous définirons d'abord de manière rigoureuse l'opérateur Dirichlet-à-Neumann, puis nous montrerons que l'annulation de l'intégrale reste vraie pour des solutions plus faibles.

2.1. Dirichlet-à-Neumann. Lorsque $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et lorsque q satisfait l'hypothèse 1, le problème de Dirichlet

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u + qu = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

Si u était une fonction $H^2(\Omega)$ alors pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on aurait d'après la formule de Green

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u v \, dS &= \int_{\Omega} \Delta u v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_{\Omega} qu v \, dx + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \end{aligned}$$

Ceci motive la définition qui suit lorsque u est moins régulière.

Définition 1. L'espace $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est le dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, i.e. l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Définition 2. L'application Dirichlet-à-Neumann associée au problème de Dirichlet (1) est l'application $\Lambda_q : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ définie par

$$\Lambda_q f(g) = \int_{\Omega} \nabla u^f \cdot \nabla v + qu^f v \, dx, \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

où $u^f \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution de (1) et $v \in H^1(\Omega)$ est n'importe quelle extension dans $H^1(\Omega)$ de g .

Lemme 5. La forme $\Lambda_q f$ est définie sans ambiguïté et est continue, donc $\Lambda_q f \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. En outre, on a

$$\Lambda_q f(g) = \Lambda_q g(f)$$

pour tout $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Démonstration. Si $w \in C_0^\infty(\Omega)$, en intégrant par parties on a

$$\int_{\Omega} \nabla u^f \cdot \nabla w + qu^f w \, dx = 0.$$

Cette identité reste vraie lorsque $w \in H_0^1(\Omega)$ par densité. Si v et \tilde{v} sont deux prolongements de g à $H^1(\Omega)$, alors en appliquant l'identité précédente à $w = v - \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)$, on obtient que $\Lambda_q f$ est définie sans ambiguïté. Il est facile de vérifier que $\Lambda_q f$ est une forme linéaire continue sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

$$|\Lambda_q f(g)| \leq (1 + \|q\|_{L^\infty}) \|u^f\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq (1 + \|q\|_{L^\infty}) \|f\|_{H^{\frac{1}{2}}} \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}}.$$

Remarquons enfin que

$$\Lambda_q f(g) = \Lambda_q g(f) = \int_{\Omega} \nabla u^f \cdot \nabla u^g + qu^f u^g \, dx, \quad f, g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Ce qui complète la preuve du lemme. \square

On introduit l'espace suivant

$$H_\Delta(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme suivante

$$(2) \quad \|u\|_{H_\Delta(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Lemme 6. *Le sous-espace $H^2(\Omega)$ est dense dans $H_\Delta(\Omega)$ pour la norme donnée par (2).*

Démonstration. $H_\Delta(\Omega)$ est un espace de Hilbert si on le munit du produit scalaire suivant

$$\langle u, v \rangle_{H_\Delta(\Omega)} = \int_\Omega u \bar{v} \, dx + \int_\Omega \Delta u \overline{\Delta v} \, dx$$

il suffit donc de montrer que $H^2(\Omega)^\perp = \{0\}$. Soit $u \in H^2(\Omega)^\perp$, on a donc

$$\int_\Omega u \bar{v} \, dx + \int_\Omega \Delta u \overline{\Delta v} \, dx = 0$$

pour tout $v \in H^2(\Omega)$. En se restreignant à $v \in C_0^\infty$, on voit que cela signifie

$$\Delta^2 u + u = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Or on a

$$\Delta^2 + 1 = (\Delta + i)(\Delta - i)$$

et comme³ $\ker(\Delta \pm i) = \{0\}$, on en tire $u = 0$. \square

Lemme 7. *Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $H^2(\Omega)$ qui converge pour la norme donnée par (2) vers $u \in H_\Delta(\Omega)$ solution de $-\Delta u + qu = 0$. Soit $f_k = u_k|_{\partial\Omega}$ alors on a*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{f_k} - u\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Démonstration. L'hypothèse de convergence se traduit de la manière suivante

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u - u_k\|_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta u - \Delta u_k\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\|u - u^{f_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_k\|_{L^2(\Omega)} + \|u_k - u^{f_k}\|_{L^2(\Omega)}$$

et il reste à prouver que le deuxième terme de droite converge vers 0. Comme

$$(-\Delta + q)(u_k - u^{f_k}) = -\Delta u_k + q u_k \in L^2 \quad \text{et} \quad u_k - u^{f_k} \in H_0^1(\Omega)$$

on a l'estimation suivante

$$\|u_k - u^{f_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u_k - q u_k\|_{L^2(\Omega)}$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|u_k - u^{f_k}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \|\Delta u_k - q u_k\|_{L^2(\Omega)} + C \|q u_k - q u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|\Delta u_k - \Delta u\|_{L^2(\Omega)} + C \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_k - u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ce qui donne la convergence désirée. \square

3. Il suffit de remarquer que $\operatorname{Re} \langle (\Delta + i)u, (\Delta - i)u \rangle_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta u\|^2$ lorsque $u \in H_\Delta(\Omega)$.

Nous pouvons maintenant démontrer l'identité permettant d'exploiter l'information du fait que les opérateurs Dirichlet-à-Neumann coïncident et que nous avons obtenue dans le cas de solutions régulières.

Lemme 8. *Supposons que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ alors si $q = q_1 - q_2$ on a*

$$\int_{\Omega} qu_1 u_2 \, dx = 0$$

pour tout $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de

$$-\Delta u_j + q_j u_j = 0$$

i.e. telles que pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_j (-\Delta v + q_j v) \, dx = 0.$$

Démonstration. On a par définition

$$\Lambda_{q_1} f_1(f_2) = \int_{\Omega} \nabla u_1^{f_1} \cdot \nabla u_2^{f_2} + q_1 u_1^{f_1} u_2^{f_2} \, dx$$

$$\Lambda_{q_2} f_1(f_2) = \Lambda_{q_2} f_2(f_1) = \int_{\Omega} \nabla u_1^{f_1} \cdot \nabla u_2^{f_2} + q_2 u_1^{f_1} u_2^{f_2} \, dx$$

où $u_j^{f_j}$ est l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_j^{f_j} + q_j u_j^{f_j} = 0 \\ u_j^{f_j}|_{\partial\Omega} = f_j \end{cases}.$$

En soustrayant les deux égalités, on obtient

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1^{f_1} u_2^{f_2} \, dx = 0$$

pour tout $f_1, f_2 \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Soient à présent u_1, u_2 deux solutions faibles de l'équation de Schrödinger, comme $H^2(\Omega)$ est dense dans $H_{\Delta}(\Omega)$, il existe une suite $(u_{j,k})_{k \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $H^2(\Omega)$ convergeant vers u_j dans $H_{\Delta}(\Omega)$. On note $f_{j,k} = u_{j,k}|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, on a donc

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1^{f_{1,k}} u_2^{f_{2,k}} \, dx = 0$$

et on passe à la limite en utilisant le lemme 7 pour obtenir

$$\int_{\Omega} (q_1 - q_2) u_1 u_2 \, dx = 0.$$

Ce qui prouve le lemme. □

Pour démontrer les théorèmes de Sylvester et Uhlmann et de Bukhgeim, il suffit alors de démontrer le théorème suivant.

Théorème 9. *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que*

$$\int_{\Omega} qu_1 u_2 \, dx = 0$$

pour tout $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de

$$-\Delta u_j + q_j u_j = 0$$

alors $q = 0$.

Remarque 10. Si on note

$$E = \{u_1 u_2 : u_j \in L^2(\Omega) \text{ solutions faibles de } -\Delta u_j + q_j u_j = 0\} \subset L^1(\Omega)$$

le théorème dit $E^\perp = \{0\}$, ce qui peut être interprété comme une propriété de densité de Vect E dans $L^1(\Omega)$.

Le reste du cours est dévolu à cette tâche.

2.2. Problème linéarisé. Essayons un instant de simplifier le problème. La question suivante semble plus facile à résoudre car on connaît plus de fonctions harmoniques explicites.

Question. Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que

$$\int_{\Omega} q u_1 u_2 \, dx = 0$$

pour tout couple (u_1, u_2) de fonctions harmoniques, a-t-on $q = 0$?

Remarque 11. Cette question correspond en fait au problème linéarisé⁴ au potentiel $q = 0$, c'est à dire à la question de l'injectivité de la différentielle en $q_0 = 0$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda_{q_0 + tq}) \right|_{t=0} = D\Lambda_{q_0}(q).$$

Calderón montre en effet que si

$$q \in \ker D\Lambda_0$$

alors

$$\int_{\Omega} q u_1 u_2 \, dx = 0$$

pour tout couple (u_1, u_2) de fonctions harmoniques.

L'observation suivante va être cruciale pour la suite :

$$\Delta(e^{x \cdot \zeta}) = \zeta^2 e^{x \cdot \zeta}$$

où l'on a noté pour $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C}$, avec $\xi, \eta \in \mathbf{R}^n$

$$\zeta^2 = \zeta \cdot \zeta = \zeta_1^2 + \dots + \zeta_n^2 = |\xi|^2 - |\eta|^2 + 2i\xi \cdot \eta.$$

Par conséquent si l'on choisit $\zeta \in \mathbf{C}^n$ qui vérifie $\zeta^2 = 0$, l'exponentielle $e^{x \cdot \zeta}$ est harmonique. Le fait que $\zeta^2 = 0$ est équivalent au fait que les parties réelles et imaginaires ont même norme et sont orthogonales

$$\zeta^2 = 0 \Leftrightarrow |\xi| = |\eta|, \quad \xi \perp \eta.$$

Notons pour la suite

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\zeta \in \mathbf{C}^n : \zeta^2 = 0\} \\ &= \{r(\theta + i\omega) \in \mathbf{C}^n : r \in \mathbf{R}^+, \theta, \omega \in S^{n-1}, \theta \perp \omega\} \end{aligned}$$

4. Le problème de Calderón est non-linéaire car $q \mapsto \Lambda_q$ n'est pas linéaire !

le cône des « fréquences » complexes donnant une exponentielle harmonique. Pour répondre à la question, il suffit donc de choisir deux exponentielles complexes $u_1 = e^{x \cdot \zeta}$ et $u_2 = e^{-x \cdot \bar{\zeta}}$ de sorte que

$$\int_{\Omega} q e^{x \cdot (\zeta - \bar{\zeta})} dx = 0.$$

Soit $\xi \in \mathbf{R}^n$, soit $\eta \in \mathbf{R}^n$ perpendiculaire à ξ et de même norme, on choisit $\zeta = (\xi + i\eta)/2$ et cela nous donne

$$\hat{q}(\xi) = 0$$

où l'on a prolongé q à \mathbf{R}^n par 0 en dehors de Ω . L'injectivité de la transformation de Fourier permet alors de conclure

$$q = 0.$$

Cette utilisation des exponentielles harmoniques faite par Calderón pour résoudre le problème linéarisé est au cœur des démonstrations de l'identifiabilité qui ont été faites jusqu'à présent. Notre but est de construire des solutions de l'équation de Schrödinger qui ressemblent aux exponentielles harmoniques ; cette construction prend le nom de l'optique géométrique complexe, et sera l'objet de ce cours.

3. INÉGALITÉS DE CARLEMAN



Torsten Carleman (1892-1949)

Les inégalités de Carleman sont des inégalités *a priori* pour des opérateurs différentiels avec un poids exponentiel dépendant d'un paramètre. Elles ont été développées et sont souvent utilisées pour obtenir des propriétés de prolongement unique. Ici on les utilise pour résoudre le problème inverse posé. Pour alléger les notations, on notera

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbf{R}^n} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \langle u, v \rangle = \int_{\mathbf{R}^n} u \bar{v} dx$$

la norme $L^2(\mathbf{R}^n)$ et le produit scalaire.

3.1. Poids linéaires. On commence par le cas des inégalités avec un poids exponentiel d'exposant linéaire; elles seront suffisantes pour résoudre le problème inverse en dimension supérieure à 3.

Théorème 12. *Soit $\omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de \mathbf{R}^n avec $n \geq 2$, soit $q \in L^\infty(\Omega)$, il existe deux constantes $C > 0$ et $h_0 > 0$ telle que pour tout $\theta, \omega \in S^{n-1}$ tout $h \in]0, h_0]$ et tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\|e^{x \cdot \zeta/h} u\| \leq Ch \|e^{x \cdot \zeta/h} (-\Delta + q)u\|$$

où $\zeta = \theta + i\omega \in \Gamma$.

Remarquons un des aspects essentiels de l'inégalité, le caractère uniforme de l'inégalité par rapport au paramètre h (destiné à être rendu petit) : la constante C ne dépend pas de $h > 0$. La seconde observation est que l'inégalité de Carleman est équivalente à

$$(3) \quad \|u\| \leq Ch \|(P + q)u\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega)$$

où P est l'opérateur conjugué

$$P = e^{x \cdot \zeta/h} (-\Delta) e^{-x \cdot \zeta/h} = -\Delta + 2h^{-1} \zeta \cdot \nabla.$$

Enfin, il suffit de prouver l'inégalité dans le cas où le potentiel est nul car il existe $h'_0 > 0$ tel que

$$Ch'_0 \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}$$

et avec ce choix

$$\|u\| \leq Ch \|Pu\| \leq Ch \|(P + q)u\| + Ch \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|$$

implique

$$\underbrace{(1 - Ch \|q\|_{L^\infty(\Omega)})}_{\geq \frac{1}{2}} \|u\| \leq Ch \|(P + q)u\|$$

lorsque $0 < h \leq \min(h_0, h'_0)$. Ainsi on a

$$\|u\| \leq 2Ch \|(P + q)u\|$$

si $0 < h \leq \min(h_0, h'_0)$.

Démonstration. On suppose $q = 0$. Il suffit de prouver l'inégalité dans le cas

$$\zeta = e_1 + ie_2$$

où e_1 et e_2 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de \mathbf{R}^n . En effet, on peut compléter (θ, ω) en une base \mathcal{B} orthonormée de \mathbf{R}^n et considérer la matrice de passage de la base canonique (e_1, \dots, e_n) à \mathcal{B}

$$Ae_1 = \theta, \quad Ae_2 = \omega$$

qui est une matrice de rotation et comme si l'on note $u_A = u(A \cdot)$ on a

$$Pu_A(x) = (-\Delta + 2h^{-1}A\zeta \cdot \nabla)u(Ax)$$

il suffit d'appliquer à u_A l'inégalité dans le cas $\zeta = e_1 + ie_2$ pour obtenir l'inégalité dans le cas général.

Supposons $\zeta = e_1 + ie_2$: on veut prouver l'inégalité

$$\|u\| \leq Ch \|\tilde{P}u\|$$

où \tilde{P} est l'opérateur

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= e^{-\frac{i\pi}{2L}x_1} P e^{\frac{i\pi}{2L}x_1} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i\pi}{2L}\right)^2 - \Delta_{x'} + 2h^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{i\pi}{2L}\right) + 2ih^{-1}\partial_{x_2}.\end{aligned}$$

L'inégalité (3) en découle si on applique cette inégalité à $\tilde{u} = e^{-\frac{i\pi}{2L}x_1}u$. Comme K est compact, il existe $L > 0$ tel que

$$\Omega \subset B(0, L) \subset [-L, L]^n.$$

On peut alors décomposer toute fonction $u \in C_0^\infty(\Omega) \subset L^2([-L, L]^n)$ en série⁵ de Fourier

$$u = \frac{L^n}{\pi^n} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} c_\alpha(u) e^{i\frac{\pi}{L}\alpha \cdot x}$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_\alpha(u) = \frac{L^n}{\pi^n} \int_{[-L, L]^n} u(x) e^{-i\frac{\pi}{L}\alpha \cdot x} dx.$$

Une intégration par parties permet de relier coefficients de Fourier d'une fonction et de sa dérivée

$$c_\alpha(\partial_j u) = i\frac{\pi}{L}\alpha_j c_\alpha(u).$$

Ceci permet de calculer l'action de l'opérateur conjugué \tilde{P} sur les coefficients de Fourier

$$c_\alpha(\tilde{P}u) = \frac{\pi^2}{L^2} \tilde{p}_\alpha c_\alpha(u)$$

avec

$$\tilde{p}_\alpha = \left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + |\alpha'|^2 - \frac{2L}{\pi}h^{-1}\alpha_2 + 2ih^{-1}\frac{L}{\pi}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right)$$

De la minoration

$$|\tilde{p}_\alpha|^2 = \left(\left(\alpha_1 + \frac{1}{2h}\right)^2 + |\alpha'|^2 - \frac{2L}{\pi h}\alpha_2\right)^2 + \frac{4L^2}{\pi^2 h^2} \underbrace{\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\right)^2}_{\geq \frac{1}{4}} \geq \frac{L^2}{\pi^2 h^2}$$

on déduit

$$|c_\alpha(\tilde{P}u)|^2 \geq \frac{\pi^2}{L^2 h^2} |c_\alpha(u)|^2$$

et en utilisant la relation de Parseval

$$\|Pu\|^2 = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} |c_\alpha(Pu)|^2 \geq \frac{\pi^2}{L^2 h^2} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} |c_\alpha(u)|^2 = \frac{\pi^2}{L^2 h^2} \|u\|^2$$

on obtient

$$\|u\| \leq \frac{Lh}{\pi} \|\tilde{P}u\|.$$

Ce qui achève la preuve de l'inégalité de Carleman avec $C = L/\pi$. \square

5. Comme $u \in C_0^\infty(\Omega)$ la convergence de la série est uniforme.

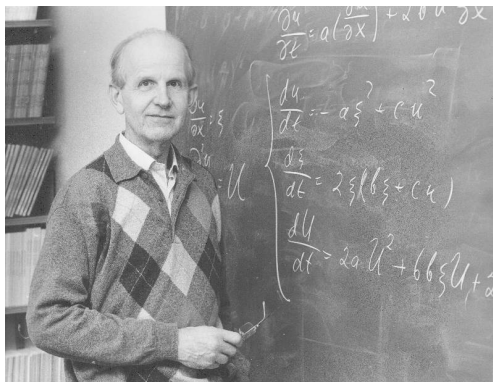
3.2. Poids quadratiques holomorphes. Pour résoudre le problème inverse considéré en dimension deux, il nous faudra une inégalité de Carleman avec un poids exponentiel holomorphe.

Théorème 13. Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{C} , il existe deux constantes $C > 0$ et h_0 telles que pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\|e^{iz^2/2h}u\| \leq C\sqrt{h}\|e^{iz^2/2h}(-\Delta + q)u\|.$$

Remarque 14. Par rapport à l'inégalité avec poids linéaire, on obtient une moins bonne majoration (en \sqrt{h} au lieu de h). Ceci est dû au fait que le poids $iz^2/2$ admet un point critique (en $z = 0$).

Une étape intermédiaire pour prouver cette inégalité est une inégalité démontrée par Lars Hörmander pour étudier l'équation de Cauchy-Riemann dans l'espace L^2 .



Lars Hörmander (1931-2012)

Théorème (Hörmander). Soit φ une fonction lisse à valeurs réelles sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ telle que $\Delta\varphi \geq c$ sur Ω , alors pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\|e^\varphi u\| \leq \sqrt{\frac{2}{c}}\|e^\varphi \bar{\partial}u\|.$$

Cette inégalité s'appuie sur une observation très simple dans les espaces de Hilbert.

Lemme 15. Soit H un espace de Hilbert et soit

$$P = A + iB$$

une application linéaire définie sur un sous-espace V de H stable par A et B et telle que

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle, \quad \langle Bu, u \rangle = \langle u, Bu \rangle$$

pour tout $u \in V$ alors on a

$$\|Pu\|^2 = \|Au\|^2 + \|Bu\|^2 + i\langle [A, B]u, u \rangle$$

pour tout $u \in V$.

Démonstration. On développe le carré scalaire

$$\|Pu\|^2 = \|Au\|^2 + \|Bu\|^2 + 2\operatorname{Im} \langle Au, Bu \rangle$$

et on observe que

$$2\operatorname{Im} \langle Au, Bu \rangle = \frac{1}{i} \langle Au, Bu \rangle - \frac{1}{i} \langle Bu, Au \rangle = \frac{1}{i} \langle (BA - AB)u, u \rangle.$$

L'identité en découle. \square

Remarque 16. Dans le langage des opérateurs non bornés, si A et B désignent les parties adjointes et anti-adjointes d'un opérateur non borné P de domaine dense

$$A = \frac{1}{2}(P + P^*), \quad B = \frac{1}{2i}(P - P^*)$$

(définies sur l'intersection des domaines de P et de son adjoint) alors

$$[A, B] = \frac{1}{4i}[P + P^*, P - P^*] = \frac{1}{2i}[P^*, P].$$

Notons que le commutateur

$$[A, B]^* = -[A, B]$$

est anti-adjoint.

Démonstration du théorème de Hörmander. Comme auparavant, l'inégalité est équivalente à une inégalité faisant intervenir l'opérateur conjugué

$$e^\varphi \bar{\partial} e^{-\varphi} = \bar{\partial} - \bar{\partial}\varphi$$

de la forme

$$\|u\| \leq \sqrt{\frac{2}{c}} \|\bar{\partial}u - \bar{\partial}\varphi u\|.$$

Or on a

$$\left[\frac{i}{2} \partial_{x_2} - \partial_{x_1} \varphi, -\frac{i}{2} \partial_{x_1} - \partial_{x_2} \varphi \right] = -\frac{i}{2} \Delta \varphi$$

donc en appliquant le lemme (15) avec $H = L^2(\Omega)$, $V = C_0^\infty(\Omega)$ et

$$A = \frac{i}{2} \partial_{x_2} - \partial_{x_1} \varphi, \quad B = \frac{1}{2i} \partial_{x_1} - \partial_{x_2} \varphi$$

on obtient

$$\|\bar{\partial}u - \bar{\partial}\varphi u\|^2 \geq \int \Delta \varphi |u|^2 dx \geq \frac{c}{2} \|u\|^2.$$

L'inégalité de Hörmander en résulte. \square

On peut maintenant en déduire l'inégalité de Carleman sur le laplacien

$$\Delta = 4\partial\bar{\partial}, \quad \partial = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

en utilisant la fonction poids suivante

$$(4) \quad \varphi = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2h} \operatorname{Im} z^2$$

pour laquelle on a

$$\Delta \varphi = 2.$$

Lemme 17. Soit φ la fonction donnée par (4), pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R})$ à valeurs réelles et tout $h \in]0, \frac{1}{2}]$ on a

$$\|e^\varphi u\| \leq \sqrt{2h} \|e^\varphi \partial u\|.$$

Démonstration. Par conjugaison de l'opérateur

$$e^\varphi \partial e^{-\varphi} = \partial - \partial\varphi$$

l'inégalité est équivalente à

$$\|\partial u - \partial\varphi u\| \geq \frac{1}{\sqrt{2h}} \|u\|.$$

On développe

$$\|\partial u - \partial\varphi u\|^2 = \|\partial u\|^2 + \|\partial\varphi u\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle \partial u, \partial\varphi u \rangle$$

et comme

$$\partial u^2 = 2\partial u u$$

en intégrant par parties

$$\int \bar{\partial}\varphi 2\partial u u \, dx = -\frac{1}{4} \int \Delta\varphi u^2 \, dx = -\frac{1}{2} \|u\|^2$$

on obtient

$$\|\partial u - \partial\varphi u\|^2 = \|\partial u\|^2 + \|\partial\varphi u\|^2 + \frac{1}{2} \|u\|^2.$$

Pour conclure, il suffit alors de montrer que

$$\|\partial u\|^2 + \|\partial\varphi u\|^2 \geq \frac{1}{2h} \|u\|^2.$$

Pour cela, on observe que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{z^2}{2} \right) = 1$$

et en intégrant par parties on obtient

$$\|u\|^2 = -2 \int z \partial u u \, dx.$$

Il en résulte par l'inégalité de Cauchy-Schwarz (appliquée à $\sqrt{h}\partial u$ et u/\sqrt{h})

$$\|u\|^2 \leq h \|\partial u\|^2 + h^{-1} \|zu\|^2 \leq h \|\partial u\|^2 + 2h \|\partial\varphi u\|^2$$

car on a

$$h\partial\varphi = h\frac{\bar{z}}{2} + z$$

et donc

$$h^2 |\partial\varphi|^2 = |z|^2 + \frac{h^2}{4} |z|^2 + h \operatorname{Re}(z^2) \geq (1-h) |z|^2 \geq \frac{|z|^2}{2}$$

si $h \leq \frac{1}{2}$. □

Démonstration du théorème 13. Exactement comme dans le cas des poids linéaires, il suffit de démontrer l'inégalité de Carleman sans le potentiel. Commençons par montrer l'inégalité

$$\|e^\varphi u\| \leq \frac{1}{\sqrt{2h}} \|e^\varphi \Delta u\|$$

pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Il suffit de la démontrer pour des fonctions u à valeurs réelles car

$$\|e^\varphi u\|^2 = \|e^\varphi \operatorname{Re} u\|^2 + \|e^\varphi \operatorname{Im} u\|^2$$

On suppose à présent que u est à valeurs réelles. Avec l'inégalité de Hörmander, on a

$$\|e^\varphi \Delta u\| \geq \|e^\varphi \partial u\|$$

et avec le lemme 17 on obtient

$$\|e^\varphi \Delta u\| \geq \frac{1}{\sqrt{2h}} \|e^\varphi u\|.$$

Pour conclure, il suffit de alors constater que

$$1 \leq e^{\frac{|z|^2}{2}} \leq \exp\left(\frac{1}{2} \sup_{z \in \bar{\Omega}} |z|^2\right) = M.$$

L'inégalité de Carleman est alors démontrée avec $C = \sqrt{2}M$ lorsque $q = 0$. \square

4. CAS DE LA DIMENSION $n \geq 3$

4.1. Théorème de Hahn-Banach. Pour résoudre l'équation de Schrödinger, nous aurons besoin du théorème de Hahn-Banach. Dans le cas d'un espace de Hilbert H , ce théorème est beaucoup plus simple à démontrer (et ne nécessite pas le lemme de Zorn).

4.1.1. Quelques rappels sur les espaces de Hilbert. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H , rappelons que la distance d'un vecteur $u \in H$ à F est

$$d(u, F) = \inf_{f \in F} \|u - f\|.$$

Dans un espace de Hilbert, cette distance est atteinte.

Théorème 18. *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace fermé de H , la distance de u à F est atteinte en un unique vecteur $\pi_F(u)$ de F .*

On peut alors définir la projection sur l'espace F

$$\begin{aligned} \pi_F : H &\rightarrow F \\ u &\mapsto \pi_F(u) \end{aligned}$$

pour laquelle on a

$$\langle u - \pi_F(u), f \rangle = 0, \quad \forall f \in F.$$

Corollaire 19. *Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H , alors*

$$H = F \oplus F^\perp$$

et les projections sur chacun des sous-espaces vectoriels fermés F et F^\perp sont caractérisées par

- (i) $d(u, F) = \|u - \pi_F(u)\|$, et $d(u, F^\perp) = \|u - \pi_{F^\perp}(u)\|$
(ii) $\langle u - \pi_F(u), f \rangle$ pour tout $f \in F$, et $\langle u - \pi_{F^\perp}(u), g \rangle = 0$ pour tout $g \in F^\perp$.

Théorème (Riesz). Soit ℓ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que

$$\ell(v) = \langle v, u \rangle$$

pour tout $v \in H$ et en outre $\|u\| = \|\ell\|$.

Démonstration. L'unicité est évidente car s'il existe deux vecteurs $u, u' \in H$ tels que $\ell(v) = \langle v, u \rangle = \langle v, u' \rangle$ alors

$$\langle v, u - u' \rangle = 0 \quad \forall v \in H$$

et donc $u = u'$. En outre, on a

$$\|u\|^2 = \ell(u) \leq \|\ell\| \|u\| \quad \text{et} \quad |\ell(v)| = |\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \|u\| \quad \forall v \in H$$

ce qui implique $\|u\| = \|\ell\|$.

Supposons que $\ell \neq 0$ (sinon $u = 0$ convient), alors il existe $w \in H$ tel que $\ell(w) \neq 0$. D'après le théorème de projection

$$H = \ker \ell \oplus \ker \ell^\perp$$

et on considère

$$u = \frac{\pi_{(\ker \ell)^\perp}(w)}{\ell(\pi_{(\ker \ell)^\perp}(w))}$$

qui appartient à $(\ker \ell)^\perp$ et vérifie $\ell(w) = 1$. Tout vecteur se décompose alors sous la forme

$$v = \underbrace{(v - \ell(v)u)}_{\in \ker \ell} + \ell(v)u$$

par conséquent $(\ker \ell)^\perp = \mathbf{C}u$ et

$$\pi_{(\ker \ell)^\perp}(v) = \ell(v)u \quad \ell(v) = \langle v, u \rangle.$$

Ce qui prouve le théorème de Riesz. □

4.1.2. *Prolongement d'une forme linéaire continue.* Une fois ces rappels effectués, il est très facile de prolonger une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert.

Théorème (Hahn-Banach). Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et $\ell : F \rightarrow \mathbf{C}$ une forme linéaire continue, il existe un prolongement $L : H \rightarrow \mathbf{C}$ de ℓ à H continu tel que $\|L\| \leq \|\ell\|$.

Démonstration. On commence par prolonger ℓ par continuité à $F = \bar{F}$

$$\tilde{\ell}(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ell(v_n) \quad \text{si} \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad v_n \in F.$$

Ce prolongement vérifie $\|\tilde{\ell}\| \leq \|\ell\|$. Par le théorème de projection, on a $H = F \oplus F^\perp$ et on peut prolonger ℓ de la manière suivante

$$L = \tilde{\ell} \circ \pi_F$$

et on a $\|L\| \leq \|\tilde{\ell}\| \|\pi_F\| \leq \|\ell\|$ car $\|\pi_F\| \leq 1$. □

4.2. Solutions de l'optique géométrique complexe. Du théorème de Hahn-Banach, on peut déduire le corollaire suivant qui nous permettra de résoudre l'équation de Schrödinger.

Corollaire 20. *Soit P une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel V d'un espace de Hilbert H . Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|v\| \leq C\|Pv\|$$

pour tout $v \in V$. Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ tel que

$$\langle Pv, u \rangle = \langle v, f \rangle$$

pour tout $v \in V$ et $\|u\| \leq C\|f\|$.

Remarque 21. Si $H = L^2$, si $V = C_0^\infty$ et si $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ est un opérateur différentiel alors

$$\int Pv \bar{u} \, dx = \int v \bar{f} \, dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

où $P^* = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (\bar{a}_\alpha \cdot)$ est l'adjoint formel de P , ce qui signifie que

$$P^*u = f$$

au sens faible.

Démonstration. On considère la forme linéaire suivante

$$\begin{aligned} \ell : P(V) &\rightarrow \mathbf{C} \\ w = Pv &\mapsto \langle v, f \rangle \end{aligned}$$

définie sur le sous-espace vectoriel $P(V) \subset H$. Cette forme est définie sans ambiguïté car si $w = Pv = Pv'$ alors

$$\|v - v'\| \leq C\|P(v - v')\| = 0$$

et donc $v = v'$. Elle est de plus continue sur V car par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\ell(w)| \leq \|f\| \|v\| \leq C\|f\| \|P^*v\| = C\|f\| \|w\|.$$

D'après le théorème de Hahn-Banach, ℓ se prolonge en une forme linéaire continue $L : H \rightarrow \mathbf{C}$ avec $\|L\| \leq C\|f\|$. D'après le théorème de Riesz, il existe $u \in H$ tel que

$$L(w) = \langle w, u \rangle$$

pour tout $w \in H$ et $\|u\| \leq \|L\| \leq C\|f\|$. En particulier, on a

$$L(Pv) = \langle Pv, u \rangle = \ell(Pv) = \langle v, f \rangle$$

pour tout $v \in V$. □

Ce théorème d'analyse fonctionnelle abstraite donne l'existence de solutions, dites de l'optique géométrique complexe.

Théorème 22. Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, tout

$$\zeta = \theta + i\omega \in \Gamma, \quad \theta, \omega \in S^{n-1}, \quad \theta \perp \omega$$

il existe une solution faible de l'équation de Schrödinger

$$-\Delta u + qu = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

de la forme

$$u = e^{x \cdot \zeta / h} (1 + r(x, \zeta, h))$$

avec

$$\|r(\cdot, \zeta, h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Démonstration. Rappelons que l'exponentielle $e^{x \cdot \zeta / h}$ est harmonique lorsque $\zeta \in \Gamma$, il nous reste donc à résoudre

$$(-\Delta + q)(e^{x \cdot \zeta / h} r) = -e^{x \cdot \zeta / h} q$$

au sens faible, ce qui est équivalent à résoudre

$$(P + q)r = -q$$

où $P = e^{-x \cdot \zeta / h} (-\Delta) e^{x \cdot \zeta / h}$ est l'opérateur conjugué. Or l'inégalité de Carleman du théorème 12 peut s'écrire

$$\|v\| \leq Ch \|(e^{x \cdot \bar{\zeta} / h} (-\Delta) e^{-x \cdot \bar{\zeta} / h} + \bar{q})v\|, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

et le corollaire 20 avec $H = L^2(\Omega)$ et $V = C_0^\infty(\Omega)$ assure l'existence de $r \in L^2$ tel que

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq C |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}$$

et tel que⁶

$$\int e^{x \cdot \bar{\zeta} / h} (-\Delta + \bar{q})(e^{x \cdot \bar{\zeta} / h} v) \bar{r} dx = \int v \bar{q} dx.$$

En choisissant $v = e^{x \cdot \bar{\zeta} / h} \bar{\psi}$ avec $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ et en prenant le conjugué de cette égalité

$$\int e^{x \cdot \zeta / h} r (-\Delta \psi + q\psi) = \int e^{x \cdot \bar{\zeta} / h} q\psi dx.$$

pour tout $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ soit encore

$$\int e^{x \cdot \zeta / h} (1 + r) (-\Delta \psi + q\psi) = 0$$

puisque'en intégrant par parties

$$\int e^{x \cdot \zeta / h} \Delta \psi = 0.$$

Ainsi $e^{x \cdot \zeta / h} (1 + r)$ est solution au sens faible de l'équation de Schrödinger. \square

6. Ce qui signifie que r est solution de $(P + q)r = -q$ au sens faible (cf. Remarque 21).

4.3. Identifiabilité en dimension $n \geq 3$. On veut prouver le théorème 9 lorsque $n \geq 3$ qui implique à son tour le théorème de Sylvester et Uhlmann. Notre point de départ est donc

$$\int_{\Omega} q u_1 u_2 \, dx = 0$$

pour toutes solutions faibles u_1, u_2 des équations de Schrödinger $(-\Delta u_j + q_j u_j) = 0$. On choisit les solutions faibles de l'optique géométrique complexe données par le théorème 22

$$\begin{cases} u_1 = e^{x \cdot \zeta_1 / h} (1 + r_1(x, \zeta_1, h)) \\ u_2 = e^{x \cdot \zeta_2 / h} (1 + r_2(x, \zeta_2, h)) \end{cases}$$

et on a donc si q désigne la différence $q_1 - q_2$

$$0 = \int_{\Omega} q u_1 u_2 \, dx = \int_{\Omega} e^{x \cdot (\zeta_1 + \zeta_2) / h} q (1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2) \, dx.$$

On choisit alors

$$\zeta_1 = \theta - i \frac{h}{2} \xi + i \eta, \quad \zeta_2 = -\theta - i \frac{h}{2} \xi - i \eta$$

de sorte que

$$\zeta_1 + \zeta_2 = -i h \xi$$

et comme on doit avoir

$$|\eta|^2 + \frac{h^2}{4} |\xi|^2 = 1, \quad \text{et} \quad \theta \perp -h\xi/2 \pm \eta$$

on impose

$$|\eta| = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4} |\xi|^2}, \quad \eta \perp \xi \perp \theta \quad |\xi| \leq 2h^{-1}.$$

Remarque 23. Ce choix ne fonctionne qu'en dimension supérieure ou égale à 3 car θ, η, ξ sont trois vecteurs orthogonaux non nuls !

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q u_1 u_2 \, dx &= \hat{q}(\xi) + \int_{\Omega} e^{-ix \cdot \xi} (q r_1 + q r_2 + q r_1 r_2) \, dx \\ &= \hat{q}(\xi) + \mathcal{O}(h) \end{aligned}$$

où l'on a prolongé q par zéro en dehors de Ω . En passant à la limite lorsque h tend vers 0, on trouve

$$\hat{q} = 0$$

et donc $q = 0$ soit $q_1 = q_2$. Le théorème 9 est prouvé lorsque $n \geq 3$.

5. PHASE QUADRATIQUE ET CAS BIDIMENSIONNEL

On l'a vu, l'argument précédent ne fonctionne que si l'on est au moins en dimension 3. L'idée est de remplacer les phases linéaires par des phases quadratiques dans la construction des solutions faibles de l'équation de Schrödinger de l'optique géométrique complexe.

5.1. Le théorème de la phase quadratique. Il nous faut dans le cas des phases quadratiques un analogue de la transformée de Fourier

$$S_h q(x) = \frac{1}{\pi h} \int e^{-\frac{i}{h} Q(y-x)} q(y) dy, \quad q \in L^1(\mathbf{R}^2)$$

où Q est la forme quadratique de matrice⁷

$$(5) \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 24. Soit Q la forme quadratique réelle non-dégénérée sur \mathbf{R}^2 de matrice (5) alors on a

$$\widehat{S_h q} = e^{\frac{ih}{4} Q(\xi)} \hat{q}$$

pour toute fonction $q \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^2(\mathbf{R}^2)$.

Remarque 25. Il y a des formules similaires pour toute forme quadratique réelle non-dégénérée sur \mathbf{R}^n en toute dimension. La transformée S_h est en fait le semi-groupe

$$S_t = e^{i4t\Box}$$

associé au d'Alembertien

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Lemme 26. Soit $s \in \mathbf{C}$ avec $\operatorname{Re} s > 0$ alors on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\frac{t^2}{2}} e^{-it\tau} dt = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\tau^2}{2s}}$$

où \sqrt{s} est la détermination de la racine sur $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}_-^*$ qui coïncide avec la racine carrée usuelle sur \mathbf{R}_+ .

Démonstration. On pose g_s la fonction de τ donné par le terme de gauche, on a

$$g_s(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

car en prenant le carré, l'intégrale se calcule explicitement en passant en coordonnées polaires

$$g_s(0)^2 = \frac{1}{2\pi} \iint e^{-s\frac{t^2+u^2}{2}} dt du = \int_0^{\infty} r e^{-s\frac{r^2}{2}} dr = \frac{1}{s}.$$

De plus en dérivant sous le signe intégral et en intégrant par parties

$$\begin{aligned} g_s'(\tau) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(-t e^{-s\frac{t^2}{2}}\right)}_{=\frac{1}{s} \left(e^{-s\frac{\tau^2}{2}}\right)'} e^{-it\tau} dt \\ &= -\frac{\tau}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\frac{t^2}{2}} e^{-it\tau} dt = -\frac{\tau}{s} g_s(\tau). \end{aligned}$$

En intégrant l'équation $g_s' = -\tau g_s/s$, on obtient la formule annoncée. \square

7. On fait l'abus de notation de confondre forme quadratique et matrice associée.

Démonstration du théorème 24. On considère l'opérateur de convolution

$$S_h^\varepsilon q(x) = \frac{1}{\pi h} \int e^{-\varepsilon \frac{|x-y|^2}{2}} e^{-\frac{i}{h} Q(x-y)} q(y) dy = K_h^\varepsilon * q$$

par la fonction $K_h^\varepsilon = \frac{1}{\pi h} e^{-\varepsilon \frac{|x|^2}{2}} e^{-\frac{i}{h} Q(x)}$. On a

$$\widehat{S_h^\varepsilon q} = \widehat{K_h^\varepsilon * q} = \widehat{K_h^\varepsilon} \widehat{q}.$$

Or on peut utiliser le lemme 26 pour calculer la transformée de Fourier

$$\begin{aligned} \widehat{K_h^\varepsilon}(\xi) &= \frac{1}{\pi h} \int e^{-\varepsilon \frac{|x|^2}{2}} e^{-\frac{i}{h} Q(x)} dx \\ &= \frac{1}{\pi h} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varepsilon + \frac{2i}{h}) \frac{x_1^2}{2}} e^{-ix_1 \xi_1} dx_1 \right) \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\varepsilon - \frac{2i}{h}) \frac{x_2^2}{2}} e^{-ix_2 \xi_2} dx_2 \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\varepsilon h + 2i} \sqrt{\varepsilon h - 2i}} e^{-h \frac{\xi_1^2}{2(\varepsilon h + 2i)}} e^{-h \frac{\xi_2^2}{2(\varepsilon h - 2i)}}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{\varepsilon h + 2i} \sqrt{\varepsilon h - 2i}} = 1$$

donc on en déduit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \widehat{K_h^\varepsilon} \widehat{q} = e^{\frac{ih\xi_1^2}{4}} e^{-\frac{ih\xi_2^2}{4}} \widehat{q} = e^{\frac{ih}{4} Q(\xi)} \widehat{q}$$

où la limite est prise dans L^2 . Ainsi a-t-on

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_h^\varepsilon q = \mathcal{F}^{-1}(e^{\frac{ih}{4} Q} \widehat{q})$$

dans L^2 par continuité de la transformée de Fourier inverse. Or par convergence dominée, on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} S_h^\varepsilon q(x) = S_h q(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^2$, donc

$$S_h q = \mathcal{F}^{-1}(e^{\frac{ih}{4} Q} \widehat{q})$$

car la convergence L^2 implique la convergence d'une suite $(S_h^{\varepsilon_k} q)_{k \in \mathbf{N}}$ presque partout. \square

Théorème 27. Soit $q \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^2(\mathbf{R}^2)$ alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_h q = q$$

dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Démonstration. Ceci découle du théorème de Plancherel

$$\|S_h q - q\|^2 = (2\pi)^{-n} \int |e^{ihQ(\xi)} - 1|^2 |\widehat{q}(\xi)|^2 d\xi$$

et du théorème de convergence dominée appliquée à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |e^{\frac{ih}{4} Q(\xi)} - 1|^2 |\widehat{q}(\xi)|^2 d\xi = 0$$

car la majoration

$$|e^{\frac{ih}{4} Q(\xi)} - 1|^2 = 2(1 - \cos(hQ(\xi)))/4 \leq 2$$

donne une domination

$$|e^{\frac{i\hbar}{4}Q(\xi)} - 1|^2 |\hat{q}(\xi)|^2 \leq 2|\hat{q}(\xi)|^2$$

par une fonction intégrable. \square

Lemme 28. Soient $u \in L^\infty$ et $v \in L^2$ alors

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} S_\hbar(uv) - uS_\hbar v = 0$$

dans L^2 .

Démonstration. Il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} \|S_\hbar(uv) - uS_\hbar v\| &\leq \|S_\hbar(uv) - uv\| + \|u(v - S_\hbar v)\| \\ &\leq \|S_\hbar(uv) - uv\| + \|u\|_{L^\infty} \|S_\hbar v - v\| \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque \hbar tend vers 0 puisque $uv \in L^2$ si $u \in L^\infty$ et $v \in L^2$. \square

Lemme 29.

5.2. Identifiabilité en dimension deux. Il faut à nouveau construire des solutions de l'équation de Schrödinger qui sont des perturbations d'exponentielles holomorphes

$$\Delta e^{-\frac{i}{2\hbar}(x_1 + ix_2 - w)^2} = 0$$

on commence par affiner avec une solution approchée.

On remarque que si Φ est une fonction holomorphe alors on a les formules de commutation suivantes

$$\partial e^{\frac{\Phi}{\hbar}} = e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \partial, \quad \bar{\partial} e^{\frac{\Phi}{\hbar}} = e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \bar{\partial}$$

et par conséquent

$$P = e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \Delta e^{-\frac{\Phi}{\hbar}} = 4e^{\frac{\Phi}{\hbar}} \bar{\partial} \partial e^{-\frac{\Phi}{\hbar}} = 4\bar{\partial} e^{\frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\hbar}} \partial e^{-\frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\hbar}}$$

On considère alors l'opérateur de Cauchy

$$Tu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbf{C} pour lequel on a

$$\bar{\partial} T = T \bar{\partial} = \text{Id}_{L^2(\Omega)}.$$

En outre $Tu \in L^\infty$ si $u \in L^\infty$ car

$$|Tu(z)| \leq \frac{\|u\|_{L^\infty}}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{|\zeta - z|} d\mu(\zeta) \leq R \|u\|_{L^\infty}$$

lorsque $\Omega \subset D(0, R)$. On choisit alors avec $\Phi = i(z - w)^2/2$

$$\begin{aligned} (6) \quad a(z, w, \hbar) &= e^{\frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\hbar}} T \left(e^{-\frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\hbar}} (Tq - Tq(w)) \right) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \text{Re}(z-w)^2} T \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \text{Re}(z-w)^2} (Tq - Tq(w)) \right) \end{aligned}$$

de sorte que

$$\Delta (e^{-i(z-w)^2/2\hbar} a) = e^{-i(z-w)^2/2\hbar} q$$

et ainsi

$$(-\Delta + q) (e^{-i(z-w)^2/2\hbar} (1 + a)) = e^{-i(z-w)^2/2\hbar} qa.$$

On admettra le lemme suivant.

Lemme 30. *Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ tel que*

$$\left\| T\left(e^{-\frac{\Phi-\bar{\Phi}}{h}} u\right) \right\| \leq C_\varepsilon h^{1-\varepsilon} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Grâce au lemme 30, on obtient

$$\begin{aligned} \|a\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| T\left(e^{-\frac{\Phi-\bar{\Phi}}{h}} (Tq - Tq(w))\right) \right\| \leq C_\varepsilon h^{1-\varepsilon} \|Tq - Tq(w)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_\varepsilon h^{1-\varepsilon} (\|q\|_{L^2(\Omega)} + |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|Tq\|_{L^\infty(\Omega)}) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\|e^{-i(z-w)^2/2h} qa\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \|a\|_{L^2(\Omega)} \leq C'_\varepsilon h^{1-\varepsilon} \|q\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

De l'inégalité de Carleman du théorème 13, on déduit l'existence de solutions faibles de l'équation

$$(-\Delta + q)(e^{-i(z-w)^2/2h} r) = -e^{-i(z-w)^2/2h} qa$$

de la même manière que les phases linéaires en utilisant le corollaire 20 du théorème de Hahn-Banach, telles que

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{h} \|qa\|_{L^2(\Omega)} \leq C''_\varepsilon h^{1-\varepsilon} \sqrt{h} \|q\|_{L^\infty}$$

On a ainsi l'existence de solutions de l'optique géométrique complexe avec une phase holomorphe quadratique.

Théorème 31. *Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ avec $\Omega \subset \mathbf{C}$, il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, tout $w \in \mathbf{C}$ il existe une solution faible de l'équation de Schrödinger de la forme*

$$u = e^{-\frac{i}{2h}(z-w)^2} (1 + a(z, w, h) + r(z, w, h))$$

où a est donnée par l'expression (6) et telle que

$$\|r(\cdot, w, h)\| \leq C_\varepsilon h^{1-\varepsilon} \sqrt{h}.$$

On part à nouveau de l'identité

$$\int_{\Omega} qu_1 u_2 \, dy = 0$$

pour toutes solutions faibles u_1, u_2 des équations de Schrödinger $(-\Delta u_j + q_j u_j) = 0$. On choisit les solutions faibles de l'optique géométrique complexe données par le théorème 31

$$\begin{cases} u_1 = e^{-\frac{i}{2h}(z-w)^2} (1 + a_1(z, w, h) + r_1(z, w, h)) \\ u_2 = e^{-\frac{i}{2h}(\bar{z}-\bar{w})^2} (1 + a_2(z, w, h) + r_2(z, w, h)) \end{cases}, \quad z = y_1 + iy_2,$$

et on a donc si q désigne la différence $q_1 - q_2$

$$0 = \int_{\Omega} qu_1 u_2 \, dy = \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{h} \operatorname{Re}(y_1 + iy_2 - w)^2} q(1 + a + r) \, dy$$

avec $a = a_1 + a_2$ et $r = r_1(a_2 + r_2) + r_2(a_1 + r_1)$, soit si $w = x_1 + ix_2$

$$\left| S_h q(x) + \frac{1}{4\pi h} \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{h} Q(x-y)} a(y, x, h) q(y) \, dy \right| \leq M_{\text{eps}} \sqrt{h} h^{-\varepsilon}$$

avec $\varepsilon < 1/4$ par exemple. Avec ces notations, rappelons que

$$a_j(y, x) = e^{-\frac{i}{h} Q(x-y)} T\left(e^{\frac{i}{h} Q(x-y)} (Tq_j - Tq_j(x))\right)(y).$$

Or on a

$$\int_{\Omega} T u v \, dx = \int_{\Omega} u T v \, dx$$

et ainsi

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{i}{h}Q(x-y)} T \left(e^{\frac{i}{h}Q(x-y)} T w \right) q \, dy = \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{h}Q(x-y)} T w T q \, dy$$

ce qui permet de constater que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi h} \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{2h}Q(x-y)} a_j q \, dy &= \frac{1}{4\pi h} \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{2h}Q(x-y)} T q (T q_j - T q_j(x)) \, dy \\ &= S_h(T q T q_j)(x) - T q_j(x) S_h(T q)(x) \end{aligned}$$

où l'on a fait l'abus de notation de continuer à noter Tq, Tq_j les extensions à \mathbf{R}^2 de Tq, Tq_j par 0 en dehors de Ω . D'après le théorème 27 et le lemme 28, il existe une suite $(h_k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui tend vers 0 telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(S_{h_k} q(x) + \frac{1}{2\pi h_k} \int_{\Omega} e^{-\frac{i}{2h_k}Q(x-y)} a(y, x) q(y) \, dy \right) = q(x)$$

pour presque tout $x \in \mathbf{R}^2$. Comme le terme de gauche est $\mathcal{O}(\sqrt{h_k} h_k^{-\varepsilon})$, on en déduit $q = 0$. Le théorème 9 est démontré en dimension 2 également.

RÉFÉRENCES

- [1] K. Astala, L. Päiväranta, *Calderón's inverse conductivity problem in the plane*, Ann. of Math., **163** (2006), 265–299.
- [2] E. Blåsten, O. Y. Imanuvilov, M. Yamamoto, *Stability and uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem for less regular potentials*, Inverse Problems and Imaging **9** (2015), 709–723.
- [3] A. L. Bukhgeim, *Recovering a potential from Cauchy data in the two-dimensional case*, J. Inverse Ill-Posed Probl. **16** (2008), 19–33.
- [4] A. P. Calderón, *On an inverse boundary value problem*, Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matematica, (1980), 65–73.
- [5] P. Caro, K. Rogers, *Global uniqueness for the Caldern problem with Lipschitz conductivities* Forum of Mathematics, Pi **4** (2016), e2.
- [6] B. Haberman, *Uniqueness in Caldern's problem for conductivities with unbounded gradient*, Comm. Math. Phys. **340** (2015), 639–659.
- [7] R. Kohn and M. Vogelius, *Determining conductivity by boundary measurements*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 289–298.
- [8] A. I. Nachman, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **143** (1996), 71–96.
- [9] M. Salo, *Calderón problem*, notes de cours disponibles à l'adresse http://users.jyu.fi/~salomi/lecturenotes/calderon_lectures.pdf
- [10] J. Sylvester, G. Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math. **125** (1987), 153–169.

Sources photographiques :

- Albert Calderón :
<http://www-news.uchicago.edu/releases/98/980417.calderon.shtml>
- Torsten Carleman :
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Carleman.html>
- Lars Hörmander :
<https://www.sydsvenskan.se/2012-12-15/matematiker-som-gjorde-stort-intryck>