Le problème inverse de la conductivité d'Alberto Calderón

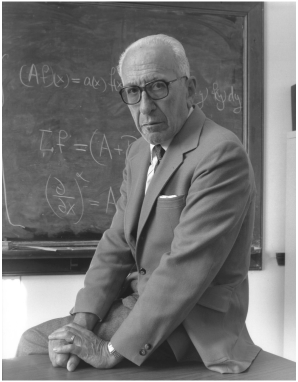
Master classe autour de l'Analyse

David Dos Santos Ferreira

Institut Élie Cartan, Université de Lorraine

IRMA, Université de Strasbourg
du 15 au 19 janvier 2018
http://irmav9.u-strasbg.fr/MasterClass/

Les héros



Alberto Calderón (1920-1998)
http://www-news.uchicago.edu/releases/98/980417.calderon.shtml

Torsten Carleman (1892-1949)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Carleman.html

Plan

1. Introduction
2. Un problème de densité
3. Le cas des dimensions supérieures à 3
4. Le cas bidimensionnel

Plan

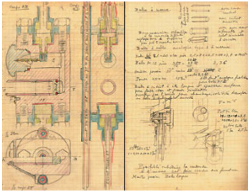
1. Introduction
2. Un problème de densité
3. Le cas des dimensions supérieures à 3
4. Le cas bidimensionnel

Prospection pétrolière électrique

Camion de Conrad Schlumberger

Electrical coring

Conrad Schlumberger



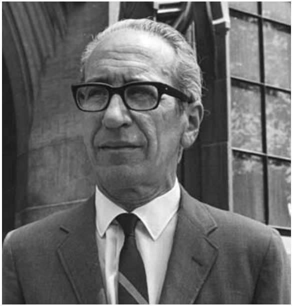
Carnet de croquis de Marcel Schlumberger

Marcel Schlumberger

Le problème de Calderón

Peut-on déterminer la conductivité électrique d'un coprs en faisant des mesures d'intensité et de tension à la périphérie ?

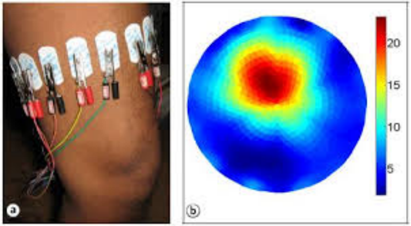
On an inverse boundary value problem,
Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Rio de Janeiro,
Editors W.H. Meyer and M.A. Raupp,
Sociedade Brasileira de Matematica (1980), 65–73.



http ://www.aprender-mat.info/ingles/historyDetail.htm ?id=Calderon

Tomographie par impédance électrique

Application à l'imagerie médicale : les différents tissus n'ont pas la même conductivité électrique.



Les cellules cancéreuses conduisent mieux l'électricité.

Formulation mathématique

Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert à bord lisse et soit $\gamma \in C^2(\bar{\Omega})$ une fonction strictement positive. On considère le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathrm{div}(\gamma \nabla u) = 0 & \text{sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

On associe à ce problème l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann

$$\Lambda_\gamma : f \mapsto (\partial_\nu u)|_{\partial\Omega}$$

où ν désigne la normale extérieure à Ω et

$$(\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} = \nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}$$

la dérivée normale.

Formulation mathématique

Le problème de Calderón est le suivant : peut-on retrouver la fonction γ à partir de l'application Λ_γ ? Nous nous intéresserons uniquement au problème de l'identifiabilité

$$\gamma \mapsto \Lambda_\gamma \text{ est-elle injective?}$$

i.e a-t-on

$$\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2?$$

La dépendance de Λ_γ par rapport à γ n'est pas linéaire !

Autres problèmes : stabilité, image de cette application, formule de reconstruction, calculs numériques, etc.

Transformation de Liouville

Problème de Calderón

David DSF

Introduction

Un problème de densité

Le cas des dimensions supérieures à 3

Le cas bidimensionnel

En fait nous nous intéresserons plutôt au problème de l'identifiabilité sur l'équation de Schrödinger

$$-\Delta u + qu = 0.$$

On peut passer d'une équation à l'autre car

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\gamma \nabla u) &= \gamma \Delta u + \nabla \gamma \cdot \nabla u \\ &= \sqrt{\gamma}\left(\Delta(\sqrt{\gamma} u) - \frac{\Delta \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}}(\sqrt{\gamma} u)\right) \end{aligned}$$

et il existe un lien entre les opérateurs Dirichlet-à-Neumann associés à ces deux équations.

Dirichlet-à-Neumann pour Schrödinger

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ un potentiel tel que 0 n'est pas une valeur propre de Dirichlet pour $-\Delta + q$
alors l'opérateur Dirichlet-à-Neumann est bien défini

$$\begin{aligned} \Lambda_q : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) &\to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ f &\mapsto (\partial_\nu u)|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

où $u \in H^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 & \text{sur } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \end{cases}$$

Théorème de Sylvester et Uhlmann

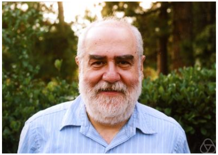
Théorème (Sylvester & Uhlmann)

Soit Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbf{R}^n$ avec $n \geq 3$, soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ deux potentiels tels que 0 n'est valeur propre de Dirichlet pour aucun des opérateurs $-\Delta + q_j$. Si

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$$

alors $q_1 = q_2$.

John Sylvester



Gunther Uhlmann

Plan

1 Introduction

2 Un problème de densité

3 Le cas des dimensions supérieures à 3

4 Le cas bidimensionnel

Formule de Green

Théorème (Formule de Green)

Soit Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbf{R}^n$, soit $u \in H^2(\Omega)$ et soit $v \in H^1(\Omega)$ alors

$$\int_\Omega \Delta u\, v\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\, v\,\mathrm{d}S$$

où $\partial_\nu u = \nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega}$ est la dérivée normale de u, ν étant la normale extérieure au bord de Ω. Si de plus $v \in H^2(\Omega)$ alors

$$\int_\Omega \Delta u\, v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega u\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u\, v\,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} u\,\partial_\nu v\,\mathrm{d}S$$

Un calcul dans le cas régulier

Si $u_1, u_2 \in H^2(\Omega)$ de traces f_1, f_2 au bord alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \Delta u_1 \, u_2 \,\mathrm{d}x - \int_\Omega u_1 \Delta u_2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u_1 \, f_2 \,\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} f_1 \, \partial_\nu u_2 \,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

et il en résulte

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

si $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$.

Définition de l'opérateur DN

$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ = toutes les restrictions de fonction $H^1(\Omega)$ à $\partial\Omega$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ = dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, i.e. espace des formes linéaires continues sur $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Définition

L'opérateur Dirichlet-à-Neumann est l'application $\Lambda_q : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *définie par*

$$\Lambda_q f(g) = \int_\Omega \nabla u^f \cdot \nabla v + q u^f v \,\mathrm{d}x, \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

où $u^f \in H^1(\Omega)$ *est l'unique solution de l'équation de Schrödinger avec donnée de Dirichlet* f *et* $v \in H^1(\Omega)$ *est n'importe quel prolongement dans* $H^1(\Omega)$ *de* g.

Une identité intégrale

Lemme

Supposons que $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ *alors si* $q = q_1 - q_2$ *on a*

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \, \mathrm{d}x = 0$$

pour tout $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ *solutions faibles de*

$$-\Delta u_j + q_j u_j = 0$$

i.e. telles que pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u_j(-\Delta v + q_j v) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Densité des produits de solutions

Théorème

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

pour tout $u_1, u_2 \in L^2(\Omega)$ solutions faibles de

$$-\Delta u_j + q_j u_j = 0$$

alors $q_1 = q_2$.

Avec le lemme précédent, le théorème de Sylvester et Uhlmann en découle Le reste du cours est dévolu à la preuve de ce théorème.

Problème linéarisé

Question

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

pour tout couple (u_1, u_2) de fonctions harmoniques, a-t-on $q = 0$?

Intoduction par Calderón des exponentielles harmoniques :

$$\mathrm{e}^{x\cdot\zeta}, \quad \zeta \in \mathbf{C}, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n$$

Plan

1 Introduction

2 Un problème de densité

3 Le cas des dimensions supérieures à 3

4 Le cas bidimensionnel

Inégalité de Carleman

Problème de Calderón
David DSF
Introduction
Un problème de densité
Le cas des dimensions supérieures à 3
Le cas bidimensionnel

Théorème

Soit $K \subset \mathbf{R}^n$ *un compact de* $\mathbf{R}^n$ *avec* $n \geq 2$, *soit* $q \in L^\infty(K)$, *il existe deux constantes* $C_K > 0$ *et* $h_0 > 0$ *telle que pour tout* $\theta, \omega \in S^{n-1}$ *tout* $h \in]0, h_0]$ *et tout* $u \in C_0^\infty(K)$ *on ait*

$$\left\| \mathrm{e}^{x\cdot\zeta/h} u \right\| \leq C_K h \left\| \mathrm{e}^{x\cdot\zeta/h} (-\Delta + q) u \right\|$$

où $\zeta = \theta + i\omega \in \Gamma$.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ \zeta \in \mathbf{C}^n : \zeta^2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ r(\theta + i\omega) \in \mathbf{C}^n : r \in \mathbf{R}^+,\ \theta, \omega \in S^{n-1},\ \theta \perp \omega \right\} \end{aligned}$$

Rappel sur les espaces hilbertiens

Théorème

Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace fermé de H, la distance de u à F est atteinte en un unique vecteur $\pi_F(u)$ de F.

Corollaire

Soit H un espace de Hilbert et soit F un sous-espace vectoriel fermé de H, alors

$$H = F \oplus F^\perp$$

et les projections sur chacun des sous-espaces vectoriels fermés F et $F^\perp$ sont caractérisées par

(i) $d(u, F) = \|u - \pi_F(u)\|$, *et* $d(u, F^\perp) = \|u - \pi_{F^\perp}(u)\|$

(ii) $\langle u - \pi_F(u), f\rangle$ *pour tout* $f \in F$, *et* $\langle u - \pi_{F^\perp}(u), g\rangle = 0$ *pour tout* $g \in F^\perp$.

Théorème de représentation de Riesz

Théorème (Riesz)

Soit ℓ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H alors il existe un unique vecteur $u \in H$ tel que

$$\ell(v) = \langle v, u \rangle$$

pour tout $v \in H$ et en outre $\|u\| = \|\ell\|$.

Théorème de Hahn-Banach

Théorème (Hahn-Banach)

Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H et $\ell : V \to \mathbf{C}$ une forme linéaire continue, il existe un prolongement $L : H \to \mathbf{C}$ de ℓ à H continu tel que $\|L\| \leq \|\ell\|$.

Corollaire

Soit P une application linéaire définie sur un sous-espace vectoriel V d'un espace de Hilbert H. Supposons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|v\| \leq C\|Pv\|, \quad \forall v \in V$$

Alors pour tout $f \in H$ il existe $u \in H$ tel que $\|u\| \leq C\|f\|$ et

$$\langle Pv, u\rangle = \langle v, f\rangle \quad \forall v \in V.$$

Solutions de l'optique géométrique complexe

Théorème

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ il existe $C_K > 0$ et $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, tout $\zeta = \theta + i\omega \in \Gamma, \quad \theta, \omega \in S^{n-1}, \quad \theta \perp \omega$ il existe une solution faible de l'équation de Schrödinger

$$-\Delta u + qu = 0 \qquad sur\ \Omega$$

de la forme

$$u = \mathrm{e}^{x\cdot\zeta/h}\big(1 + r(x, \zeta, h)\big)$$

avec

$$\|r(\cdot, \zeta, h)\| \leq C_K h \|q\|.$$

Démonstration du théorème de Sylvester et Uhlmann

On a

$$\int_\Omega (q_1 - q_2) u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

pour toutes solutions faibles u_1, u_2 des équations de Schrödinger $(-\Delta u_j + q_j u_j) = 0$. On choisit

$$\begin{cases} u_1 = \mathrm{e}^{x\cdot\zeta_1/h}\big(1 + r_1(x,\zeta_1,h)\big) \\ u_2 = \mathrm{e}^{x\cdot\zeta_2/h}\big(1 + r_2(x,\zeta_2,h)\big) \end{cases}$$

et on a donc si q désigne la différence $q_1 - q_2$

$$0 = \int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{e}^{x\cdot(\zeta_1+\zeta_2)/h} q(1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration du théorème de Sylvester et Uhlmann

On choisit alors

$$\zeta_1 = \theta - i\frac{h}{2}\xi + i\eta, \quad \zeta_2 = -\theta - i\frac{h}{2}\xi - i\eta$$

de sorte que

$$\zeta_1 + \zeta_2 = -ih\xi$$

et comme on doit avoir

$$|\eta|^2 + \frac{h^2}{4}|\xi|^2 = 1, \quad \text{et} \quad \theta \perp -h\xi/2 \pm \eta$$

on impose

$$|\eta| = \sqrt{1 - \frac{h^2}{4}|\xi|^2}, \quad \eta \perp \xi \perp \theta \quad |\xi| \leq 2h^{-1}.$$

On obtient finalement

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}x = \hat{q}(\xi) + \mathcal{O}(h)$$

et on passe à la limite $h \to 0$.

Plan

1. Introduction
2. Un problème de densité
3. Le cas des dimensions supérieures à 3
4. Le cas bidimensionnel

Théorème de Bukhgeim

Théorème (Bukhgeim)

Soit Ω un ouvert à bord lisse de $\mathbf{R}^2$, soient $q_1, q_2 \in L^\infty(\Omega)$ deux potentiels tels que 0 n'est valeur propre de Dirichlet pour aucun des opérateurs $-\Delta + q_j$. Si

$$\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$$

alors $q_1 = q_2$.

Comme on l'a vu, la méthode de Sylvester et Uhlmann requiert $n \geq 3$.

Il faut construire de nouvelles solutions de l'optique géométrique complexe.

Inégalité de Carleman

Théorème

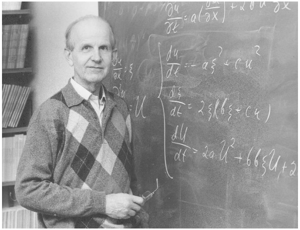
Soit K un compact de $\mathbf{C}$, il existe deux constante $C_K > 0$ et h_0 telles que pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $u \in C_0^\infty(K)$ on a

$$\left\| \mathrm{e}^{iz^2/2h} u \right\| \leq C_K \sqrt{h} \left\| \mathrm{e}^{iz^2/2h} (-\Delta + q) u \right\|.$$

Remarque

Par rapport à l'inégalité avec poids linéaire, on obtient une majoration en $\sqrt{h}$ au lieu de h. Ceci est du au fait que le poids $iz^2/2$ admet un point critique (en $z = 0$).

Inégalité de Hörmander



Lars Hörmander (1931-2012)

Théorème (Hörmander)

Soit φ une fonction lisse à valeurs réelles sur un ouvert $\Omega \subset \mathbf{C}$ telle que $\Delta\varphi \geq c$ sur Ω, alors pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$\|\mathrm{e}^\varphi u\| \leq \frac{1}{\sqrt{2c}} \|\mathrm{e}^\varphi \bar{\partial} u\|.$$

Commutateur

Lemme

Soit H un espace de Hilbert et soit

$$P = A + iB$$

une application linéaire définie sur un sous-espace V de H stable par A et B et telle que

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, Au \rangle, \quad \langle Bu, u \rangle = \langle u, Bu \rangle$$

pour tout $u \in V$ alors on a

$$\|Pu\|^2 = \|Au\|^2 + \|Bu\|^2 + \langle [A, B]u, u \rangle$$

pour tout $u \in V$.

Une autre estimation

On choisit

$$\varphi = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2h}\operatorname{Im} z^2 \tag{1}$$

pour laquelle on a

$$\Delta\varphi = 2.$$

Lemme

Soit φ la fonction donnée par (1), pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega; \mathbf{R})$ à valeurs réelles et tout $h \in]0, \frac{1}{2}]$ on a

$$\|e^\varphi u\| \leq \sqrt{2h}\|e^\varphi \partial u\|.$$

Démonstration de Carleman

Commençons par montrer l'inégalité

$$\|\mathrm{e}^{\varphi} u\| \leq \frac{1}{2\sqrt{2h}} \|\mathrm{e}^{\varphi} \Delta u\|.$$

Il suffit de la démontrer pour des fonctions u à valeurs réelles. Avec l'inégalité de Hörmander, on a

$$\|\mathrm{e}^{\varphi} \Delta u\| \geq \frac{1}{2} \|\mathrm{e}^{\varphi} \partial u\|$$

et avec la 2ème estimation on obtient

$$\|\mathrm{e}^{\varphi} \Delta u\| \geq \frac{1}{2\sqrt{2h}} \|\mathrm{e}^{\varphi} u\|.$$

Pour conclure, il suffit de alors constater que

$$1 \leq \mathrm{e}^{\frac{|z|^2}{2}} \leq \exp\left(\frac{1}{2} \sup_{z \in K} |z|^2\right) = M_K.$$

Solutions de l'optique géométrique complexe

Théorème

Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ *avec* $\Omega \subset \mathbf{C}$, *il existe* $C_K > 0$ *et* $h_0 > 0$ *tel que pour tout* $h \in]0, h_0]$, *tout* $w \in \mathbf{C}$ *il existe une solution faible de l'équation de Schrödinger de la forme*

$$u = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h}(z-w)^2}\big(1 + r(z,w,h)\big)$$

avec

$$\|r(\cdot,w,h)\| \leq C_K\sqrt{h}.$$

Phase quadratique

Il nous faut dans le cas des phases quadratiques un analogue de la transformée de Fourier

$$S_h q(x) = \frac{1}{2\pi h} \int \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h} Q(y-x)} q(y)\, \mathrm{d}y, \quad q \in L^1(\mathbf{R}^2)$$

où Q est la forme quadratique de matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Théorème

Soit Q la forme quadratique réelle non-dégénérée sur $\mathbf{R}^2$ de matrice (2) alors on a

$$\widehat{S_h q} = \mathrm{e}^{ihQ(\xi)} \hat{q}$$

pour toute fonction $q \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^2(\mathbf{R}^2)$.

Phase quadratique

Théorème

Soit $q \in L^1(\mathbf{R}^2) \cap L^2(\mathbf{R}^2)$ *alors*

$$\lim_{h \to 0} S_h q = q$$

dans $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Démonstration du théorème de Bukhgeim

On a

$$\int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}y = 0$$

pour toutes solutions faibles $(-\Delta u_j + q_j u_j) = 0$.
On choisit

$$\begin{cases} u_1 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h}(z-w)^2}\big(1 + r_1(z,w,h)\big) \\ u_2 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h}(\bar{z}-\bar{w})^2}\big(1 + r_2(z,w,h)\big) \end{cases}, \quad z = y_1 + iy_2,$$

et on a donc

$$0 = \int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{i}{h}\mathrm{Re}\,(y_1+iy_2-w)^2} q(1 + r_1 + r_2 + r_1 r_2)\,\mathrm{d}y,$$

soit, si $w = x_1 + ix_2$ et si $\|r_1\| \leq Ch\sqrt{h}$ et $\|r_2\| \leq Ch\sqrt{h}$

$$S_h q(x) = \mathcal{O}(h).$$

Il existe une sous-suite $(S_{h_k} q)_{k\in\mathbf{N}}$ convergeant vers q presque partout, ainsi $q_1 = q_2$ presque partout.

Compléments

En fait, les restes ne sont pas assez petits, il faut construire des corrections

$$\begin{cases} u_1 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h}(z-w)^2}\left(1 + a_1(z,w,h) + r_1(z,w,h)\right) \\ u_2 = \mathrm{e}^{-\frac{i}{2h}(\bar{z}-\bar{w})^2}\left(1 + a_2(z,w,h) + r_2(z,w,h)\right) \end{cases}, z = y_1 + iy_2,$$

avec $\|r_1\| \leq Ch^{1-\varepsilon}\sqrt{h}$ et $\|r_2\| \leq Ch^{1-\varepsilon}\sqrt{h}$

$$0 = \int_\Omega q u_1 u_2 \,\mathrm{d}y = \int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{i}{h}\mathrm{Re}\,(y_1+iy_2-w)^2} q(1+a+r)\,\mathrm{d}y,$$

avec $\|r\| \leq Ch^{1-\varepsilon}\sqrt{h}$. On peut alors montrer

$$\left| S_h q(x) - \int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{i}{h}Q(x-y)} a(x,y,h) q(y)\,\mathrm{d}y \right| \leq \sqrt{h} h^{-\varepsilon}$$

et dans L^2 $\lim_{h\to 0} \int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{i}{h}Q(x-y)} a(x,y,h) q(y)\,\mathrm{d}y = 0$ Il existe une sous-suite $(S_{h_k} q)_{k\in\mathbf{N}}$ convergeant vers q presque partout, ainsi $|q(x)| \leq \varepsilon$ presque partout et donc $q = 0$.

This is the end

Merci pour votre attention !