Dynamique des EDP dissipatives - Cours II

Geneviève Raugel

CNRS et Université Paris-Sud

Master Class, Strasbourg, Janvier 2018

Attracteur global

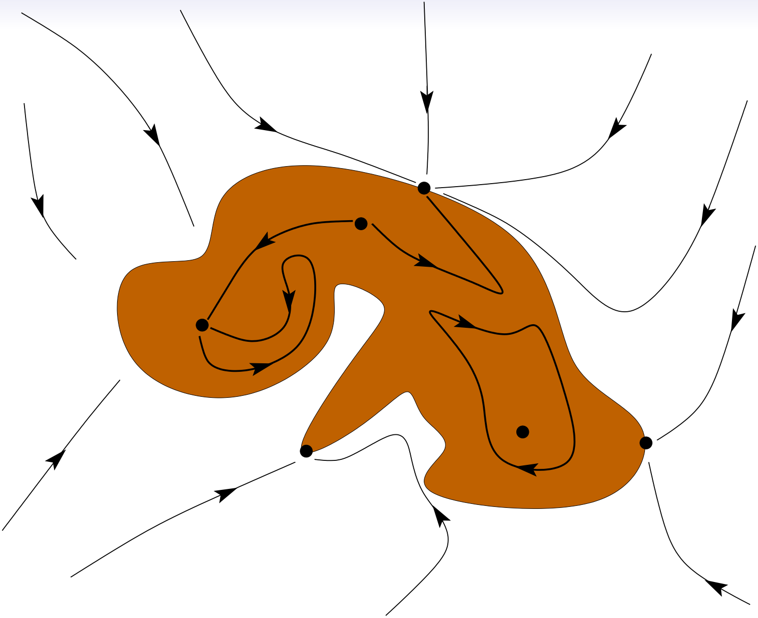
Définition

Soit $S(t)$, $t \in G^+$, un système dynamique sur X. Un sous-ensemble $\mathcal{A} \neq \emptyset$ de X est appelé attracteur global du système $S(t)$ si
1) $\mathcal{A}$ est un fermé, borné de X,
2) $\mathcal{A}$ est invariant (i.e. $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, pour tout $t \in G^+$),
3) $\mathcal{A}$ est attractif (i.e. $\mathcal{A}$ attire tout borné B de X).

On peut également définir des attracteurs locaux. Un sous-ensemble $J \neq \emptyset \subset X$ est un *attracteur local* si J est fermé, borné, invariant et attire un voisinage de lui-même.

Lemme (Lemme 1)

Si $S(t)$ admet un attracteur global $\mathcal{A}$, on a les propriétés :
a) Si B est un sous-ensemble borné de X, invariant, alors $B \subset \mathcal{A}$ (propriété de maximalité).
b) Si B est un sous-ensemble fermé de X, attractif, alors $\mathcal{A} \subset B$ (propriété de minimalité).
c) $\mathcal{A}$ est unique.



a) Si B est un borné, invariant, alors
$\delta_X(B, \mathcal{A}) = \delta_X(S(t)B, \mathcal{A}) \to_{t\to+\infty} 0$ et donc $B \subset \overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.
b) Si B est fermé et attractif, alors
$\delta_X(\mathcal{A}, B) = \delta_X(S(t)\mathcal{A}, B) \to_{t\to+\infty} 0$ et donc $\mathcal{A} \subset \overline{B} = B$.
L'assertion c) découle immédiatement de a) et b).

Lemme (Lemme 2)

Si $S(t)$, $t \geq 0$, est un système dynamique continu sur un espace métrique connexe X et si A est un ensemble compact, invariant, qui attire tout compact de X, alors A est connexe. En particulier, si $S(t)$ admet un attracteur global compact $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ est connexe.

Remarque : Si X est un espace métrique, l'attracteur global compact $\mathcal{A}$ d'un système dynamique discret S n'est pas forcément connexe, comme le montre un contrexemple de Gobbino et Sardella (1997). Toutefois, si X est un espace de Banach et si $\mathcal{A}$ est l'attracteur global compact d'un système dynamique discret ou continu, alors $\mathcal{A}$ est connexe (Massat, 1983).

Remarque

Si le système dynamique $S(t)$ admet un attracteur global $\mathcal{A}$, alors

$$\mathcal{A} = \{u(0) \,|\, u \in C_b^0(G, X) \text{ est une trajectoire complète bornée de } S(t)\} .$$

Définition (dissipation)

Soit $S(t)$ un système dynamique.
1) On dit que $S(t)$ est ponctuellement dissipatif (ou dissipatif point par point) s'il existe un ensemble borné B_0 tel que, pour tout $z \in X$, il existe un temps $\tau(z) \in G^+$ tel que

$$S(t)u_0 \in B_0 \, , \quad \forall \, t \geq \tau(z), \; t \in G^+ \, .$$

2) On dit que $S(t)$ est dissipatif sur les bornés ou bien admet un borné absorbant s'il existe un ensemble borné B_0 tel que, pour tout borné $B \subset X$, il existe un temps $\tau(B) \in G^+$ tel que

$$S(t)B \subset B_0 \, , \quad \forall t \geq \tau(B) \, , t \in G^+ \, .$$

Dans la démonstration du théorème fondamental d'existence d'un attracteur global, on utilisera le lemme suivant.

Lemme (Lemme 3)

Soit $S(t)$ un système dynamique finalement borné et ponctuellement dissipatif. Alors, il existe un borné $B_1 \subset X$ tel que, pour tout compact $K \subset X$, il existe $\varepsilon = \varepsilon(K) > 0$, $t_1 = t_1(K) \in G^+$ tels que

$$S(t)(V_\varepsilon(K)) \subset B_1 , \quad \forall\, t \geq t_1,\ t \in G^+ .$$

Démonstration :
On suppose pour simplifier que $S(t)$ est un système continu.

Puisque $S(t)$ est ponctuellement dissipatif, il existe un ouvert borné B_0 tel que, pour tout $u_0 \in X$, il existe un temps $t^*(u_0) \geq 0$ tel que

$$S(t)u_0 \subset B_0 \ , \quad \forall t \geq t^*(u_0) \ .$$

Comme $S(t^*(u_0))$ est continu de X dans X, il existe $\varepsilon(u_0) > 0$ tel que

$$S(t^*(u_0))(V_{\varepsilon(u_0)}(u_0)) \subset B_0 \ ,$$

et donc, pour $s \geq \tau_0$, où τ_0 est choisi de sorte que $\gamma^+_{\tau_0}(B_0)$ soit borné,

$$S(s + t^*(u_0))(V_{\varepsilon(u_0)}(u_0)) \subset \gamma^+_{\tau_0}(B_0) \equiv B_1 \ .$$

Soit K un ensemble compact de X. On peut recouvrir K par un nombre fini de voisinages $V_{\varepsilon(u_{0i})}(u_{0i})$, $1 \leq i \leq k$, où $u_{0i} \in K$. En outre, il existe $\varepsilon(K) > 0$ tel que

$$K \subset V_{\varepsilon(K)}(K) \subset \bigcup_{i=1}^{i=k} V_{\varepsilon(u_{0i})}(u_{0i}) \ .$$

Finalement, si on pose $t_1(K) = \max_{1 \leq i \leq k}(\tau_0 + t^*(u_{0i}))$, on a

$$S(t)(V_{\varepsilon(K)}(K)) \subset B_1 \ , \quad t \geq t_1(K) \ .$$

Existence d'un attracteur global compact

Théorème (Théorème fondamental d'existence d'un attracteur global compact)

Un système dynamique $S(t)$ sur X admet un attracteur global compact $\mathcal{A}$ dans X ssi
(i) $S(t)$ est asymptotiquement compact,
(ii) $S(t)$ est ponctuellement dissipatif,
(iii) $S(t)$ est finalement borné.
En outre, on a

$$\mathcal{A} = \cup\{\omega(B) \,|\, B \text{ borné de } X\} \ .$$

L' existence d'un attracteur global borné n'implique pas que, pour tout borné $B \subset X$, $\gamma^+(B)$ soit borné (d'où la notion de finalement borné).
Preuve dans le cas où $S(t)$ est continu

Démonstration

A) $\mathcal{A}$ attracteur global compact $\rightsquigarrow$ (i), (ii) et (iii) .

Réciproque :

1) Soit B_1 l'ensemble borné défini au lemme 3. Soit $\mathcal{A} = \omega(B_1)$.

2) $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide, compact, invariant qui attire B_1.

3) $\mathcal{A}$ attire tout borné B de X. Posons $K = \omega(B)$. Le théorème sur les ensembles ω-limites entraîne que K est compact et attire B. Soit ε t.q. $0 < \varepsilon < \varepsilon(K)$, où $\varepsilon(K)$ est donné au lemme 3. Puisque K attire B, il existe $t_0 > 0$ tel que

$$S(t)B \subset V_\varepsilon(K) , \quad \forall t \geq t_0 .$$

et donc, pour $t \geq 0$,

$$S(t)S(t_1(K) + t_0)B \subset S(t)S(t_1(K))V_\varepsilon(K) \subset S(t)B_1 ,$$

où $t_1(K)$ a été défini au lemme 3. $\mathcal{A}$ attirant B_1, $\mathcal{A}$ attire aussi B.

4) D'après le lemme 1, $\mathcal{A}$ contient tout ensemble borné invariant et donc l'ensemble ω-limite $\omega(B)$ de tout borné B de X. Comme $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{A})$, l'égalité du théorème est démontrée.

Exercices

Exercice 1

1) Un sous-ensemble E de X est *stable* (au sens de Lyapounov) si, pour tout voisinage V de E dans X, il existe un voisinage W de E dans X tel que $S(t)W \subset V$, pour tout $t \in G^+$.
2) Un sous-ensemble E de X est *uniformément asymptotiquement stable* si E est stable et attire un voisinage de lui-même.

Théorème

On suppose que $S(t)$ est un système dynamique tel que l'application $(t, u) \in G^+ \times X \mapsto S(t)u \in X$ est continue. Si A est un ensemble compact, positivement invariant, qui attire un voisinage de lui-même, alors A est stable et donc uniformément asymptotiquement stable.

Exercice 2 Soit $S(t)$, $t \in G^+$, un système dynamique sur X et soit A un sous-ensemble invariant, compact. Si les opérateurs $S(t)$ sont injectifs sur A, pour tout $t \in G^+$, alors $S(t)\big|_A$ est un groupe d'opérateurs continus sur A.
(bijection continue sur un compact $\rightsquigarrow$ bijection bicontinue sur A)

Exemples d'équations ayant un attracteur global compact

1) Equation de la chaleur (2) ($S(t)$ est compact, pour $t > 0$) (ouvert borné).
2) Equation de Navier-Stokes (ouvert borné)
3) Equation des fluides de grade deux (ouvert borné)
4) Equation des ondes avec dissipation (4) ($S(t)$ est a.c.) (ouvert borné)

Exemples de systèmes asymptotiquement compacts

Théorème

1) Soit $S(t)$ un système dynamique défini sur un sous-ensemble fermé positivement invariant M d'un Banach X. On suppose que, pour tout $t \in G^+$, pour tout $u \in M$,

$$S(t)u \,=\, U(t)u + V(t)u \ ,$$

où $U(t)$, $V(t)$ sont des applications de M dans X, t. q., pour tout borné $B \subset M$, il existe $\tau_0(B) \in G^+$, t. q., $\forall t \geq \tau_0(B)$, $t \in G^+$,

(i) l'image $U(t)B$ est relativement compacte,

(ii)

$$\|V(t)u\|_X \,\leq\, k(t, \|B\|_X) \ , \ \forall\, u \in B \ ,$$

où $k : (t, r) \in [0, +\infty) \times [0, +\infty) \mapsto k(t, r) \in [0, +\infty)$ est une fonction t.q. $k(t, r) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Alors, $S(t)$ est asymptotiquement compact.

2) Si $S(t)$ admet un attracteur global compact sur un Banach X, alors $S(t) = U(t) + V(t)$, où $U(t)$, $V(t)$ satisfont à (i) et (ii).

Preuve dans le cas $S(t)$ continu

1) Soit B un borné de M et $\tau = \tau(B) \geq 0$ tel que $\gamma_\tau^+(B)$ soit borné. Soit z_n une suite dans B et $t_n \geq \tau$ une suite tendant vers $+\infty$. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir l'ensemble $\{S(t_n)z_n\}$ par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$. D'après (ii), il existe $t_1 = t_1(\varepsilon, B) > \tau_0(\gamma_\tau^+(B))$ t. q., $\forall t \geq t_1$,

$$\|V(t)u\|_X \;\leq\; k(t, \|\gamma_\tau^+(B)\|_X) \;\leq\; \varepsilon/2\;, \quad \forall\, u \in \gamma_\tau^+(B) \qquad (1)$$

Soit $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que, pour $n \geq n_1$, $t_n \geq \tau + t_1$. Puisque l'ensemble $\{S(t_n)z_n \,|\, n \leq n_1\}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$, montrons que $B_1 \;=\; \{S(t_n)y \,|\, y \in B,\; t_n \geq \tau + t_1\}$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$. Tout élément de B_1 s'écrit

$$S(t_1)S(t_n - t_1)y \;=\; U(t_1)S(t_n - t_1)y + V(t_1)S(t_n - t_1)y\;.$$

Mais $U(t_1)S(t_n - t_1)y \subset U(t_1)\gamma_\tau^+(B)$ est compact et peut donc être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon/2$. Mais, d'après (1), $\|V(t_1)S(t_n - t_1)y\|_X \leq \varepsilon/2$, pour tout $n \geq n_1$. Donc B_1 peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon $\leq \varepsilon$.

Preuve : suite

2) Si $S(t)$ admet un attracteur global compact $\mathcal{A}$ dans le Banach X, alors, pour tout $z \in X$, il existe au moins un élément $a_z \in \mathcal{A}$ tel que $d(z, a_z) = \delta_X(z, \mathcal{A})$. On pose $a_z = Pz$. On pose $U(t) = PS(t)$ et $V(t) = (I - P)S(t)$.

Remarque

Si X est un espace de Hilbert ou, plus généralement, un espace de Banach uniformément convexe, on peut poser $U(t)u = P_0S(t)u$ et $V(t)u = (I - P_0)S(t)u$, où P_0 est la projection sur l'enveloppe convexe fermée $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{A})$ de l'attracteur global compact $\mathcal{A}$. Dans ce cas, $U(t)$ et $V(t)$ sont des fonctions continues de u.

Rappel :

Un espace de Banach est uniformément convexe si, pour tout ε, $0 < \varepsilon \leq 2$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour x, y satisfaisant à $\|x\|_X \leq 1$, $\|y\|_X \leq 1$ et $\|x - y\|_X > \varepsilon$, on a $\|\frac{x+y}{2}\|_X < 1 - \delta$. On rappelle également qu'un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

Théorème (Ball, 1992)

Soient Y un espace topologique et X un espace de Banach uniformément convexe t.q. l'injection de X dans Y soit continue.
Soit $S(t)$ un système dynamique continu sur X t.q.
(i) pour tout $t \geq 0$, $S(t)$ est continu sur les bornés de X, pour la topologie de Y ;
(ii) pour tout borné B of X tel que $\gamma_\tau^+(B)$ est borné dans X pour un $\tau \geq 0$, toute suite $S(t_j)b_j$, où $b_j \in B$ et $t_j \to_{j\to\infty} +\infty$, est relativement compacte dans Y ;
(iii) pour tout $x_0 \in X$ et $t \geq 0$, on a

$$\mathcal{F}(S(t)x_0) = \exp(-\gamma t)\mathcal{F}(x_0) + \int_0^t \exp(-\gamma(t-s))\mathcal{F}_1(S(s)x_0)\, ds\ , \tag{2}$$

où $\gamma > 0$, $\mathcal{F}(x) = \|x\|_X^p + \mathcal{F}_0(x)$, $p > 0$ et $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ sont des fonctionnelles continues sur les bornés de X pour la topologie de Y et sont bornées sur les bornés de X.
Alors, le système $S(t)$ est asymptotiquement compact dans X.

Démonstration

- Soit B un borné de X tel que $\gamma_\tau^+(B)$ est borné dans X pour un $\tau \geq 0$ et soit $S(t_j b_j)$, $b_j \in B$ et $t_j \to_{j\to\infty} +\infty$.

Puisque X est réflexif, il existe une sous-suite, encore notée t_j, telle que $S(t_j)b_j) \rightharpoonup z$ faiblement dans X, où $z \in B_0 \equiv \overline{\mathrm{co}}(\gamma_\tau^+(B))$, l'enveloppe convexe fermée de $\gamma_\tau^+(B)$. A cause de (ii), on peut aussi supposer que $S(t_j)b_j \to z$ in Y quand $j \to +\infty$.

- On veut montrer que $S(t_j')b_{j'} \to z$ dans X, où j' est une sous-suite de j, $j' \to +\infty$. Puisque X est uniformément convexe, il suffit de montrer que $\lim_{j'\to+\infty} \|S(t_{j'})b_{j'}\|_X = \|z\|_X$, pour une sous-suite j' de j.
- Comme $S(t_j)b_j$ converge faiblement vers z, on sait déjà que $\|z\|_X \leq \liminf_{j\to+\infty} \|S(t_j)b_j\|_X$.
- Alors, il reste à montrer que $\limsup_{j'\to+\infty} \|S(t_{j'})b_{j'}\|_X \leq \|z\|_X$, pour une sous-suite j' de j.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une sous-suite j^n telle que $S(t_{j^n} - n)b_{j^n} \rightharpoonup z_n$ faiblement dans X et $S(t_{j^n} - n)b_{j^n} \to z_n$ dans Y.

Démonstration (suite)

- Par le procédé de diagonalisation, on obtient une sous-suite j' t.q.

$$S(t_{j'}-n)b_{j'} \rightharpoonup z_n \text{ dans } X \quad S(t_{j'}-n)b_{j'} \to z_n \ \in Y \ , \ \forall n \in \mathbf{N} \ . \quad (3)$$

- (i) entraîne que, pour tout $t \geq 0$, $S(t_{j'}-n+t)b_{j'} \to S(t)z_n$ dans Y. Et $S(n)z_n = z$. On considère (2) pour $t = n$ et $x_0 = S(t_{j'}-n)b_{j'}$, quand $t_{j'} - n \geq \tau$. De (2), (3) et du théorème de convergence dominée de Lebesgue, il vient

$$\limsup_{j' \to +\infty} (\|S(t_{j'})b_{j'})\|_X^p) + \mathcal{F}_0(z) \leq \exp(-\gamma n) \sup_{x \in B_0} (|\mathcal{F}(x)|) + \int_0^n \exp(-\gamma(n-s))\mathcal{F}_1(S(s)z_n)\, ds \ ,$$

ou, puisque $\mathcal{F}(z) = \exp(-\gamma n)\mathcal{F}(z_n) + \int_0^n \exp(-\gamma(n-s))\mathcal{F}_1(S(s)z_n)\, ds$, on a

$$\limsup_{j' \to +\infty} (\|S(t_{j'})b_{j'})\|_X^p) \leq 2\exp(-\gamma n) \sup_{x \in B_0} (|\mathcal{F}(x)|) + \|z\|_X^p \ .$$

Si n tend vers $+\infty$, on a $\limsup_{j' \to +\infty} \|S(t_{j'})b_{j'})\|_X \leq \|z\|_X$.

Remarques et applications

Remarque : On a un résultat semblable pour les systèmes discrets à condition de remplacer l'égalité (ii) par l'égalité, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathcal{F}(S^n x_0) \,=\, \exp(-\gamma n)\mathcal{F}(x_0) + \sum_{m=0}^{n} \exp(-\gamma(n-m))\mathcal{F}_1(S^m x_0)\, ds\ .$$

Application :

L' équation des ondes avec dissipation et non-linéarité cubique sur Ω borné en dimension $n = 3$. Sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), on peut utiliser le théorème de Ball avec $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $Y = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ et

$$\mathcal{F}(\vec{u}) = \gamma E_0 + 2E_1 \equiv \|v\|^2_{L^2} + \|\nabla u\|^2_{L^2} + \mathcal{F}_0(\vec{u}),$$

où $E_0(\vec{u}) = \int_\Omega (\frac{\gamma}{2}u^2 + uv)dx$, $E_1(\vec{u}) = \int_\Omega [\frac{1}{2}(v^2 + |\nabla u|^2) - F(u)]dx$
On vérifie que $\frac{\mathcal{F}(\vec{u})}{dt}(t) + \gamma\mathcal{F}(\vec{u}) = \mathcal{F}_1(\vec{u}(t))$.

Systèmes gradients

En général, il est difficile de décrire l'attracteur global. Dans le cas des systèmes gradients, une description partielle est possible.

Définition

Soit $S(t)$, $t \in G^+$, *un système dynamique sur* X.
1) $\Phi \in C^0(X, \mathbb{R})$ *est une fonctionnelle de Lyapounov si*

$$\Phi(S(t)u) \leq \Phi(u)\ , \ \forall\, t \in G^+\ , \quad \forall\, u \in X\ . \tag{4}$$

2) Une fonctionnelle de Lyapounov Φ *est dite stricte si, en outre, l'égalité* $\Phi(S(t)u) = \Phi(u)$ *pour tout* $t \in G^+$, *implique que* u *est un point d'équilibre.*
3) $S(t)$ *est un système gradient s'il admet une fonctionnelle de Lyapounov stricte.*

Soit $\mathcal{E} = \{z \in X \,|\, S(t)z = z\,, \forall t \in G^+\}$ l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)$. Puisque, pour tout $t \in G^+$, $S(t) \in C^0(X, X)$, $\mathcal{E}$ est fermé.

Théorème (Principe d'invariance de LaSalle)

Soit $S(t)$ un système gradient sur X ayant une fonctionnelle de Lyapounov Φ. Soit z tel que $\gamma^+(z)$ soit relativement compacte dans X. Alors,
1) $l = \lim_{t \to +\infty} \Phi(S(t)z)$ *existe,*
2) $\Phi(v) = l$, *pour tout* $v \in \omega(z)$,
3) $\omega(z) \subset \mathcal{E}$ *; en particulier,* $\mathcal{E} \neq \emptyset$ *; en outre,*
$\delta_X(S(t)z, \mathcal{E}) \to_{t \to +\infty} 0$,
4) $\omega(z)$ *est connexe.*

Proposition

Soit $S(t)$, $t \in G^+$, un système dynamique sur X et soit z un point de X tel qu'il existe une trajectoire négative u_z dans X avec $u_z(0) = z$. On suppose que la trajectoire $u_z(\mathbb{R})$ est relativement compacte, alors
1) l'ensemble $\alpha_{u_z}(z)$ est non vide, compact, invariant, et
$\delta_X(u_z(-t), \alpha_{u_z}(z)) \to_{t \to +\infty} 0$ *;*
2) si, en outre, $S(t)$ est un système gradient, on a l'inclusion $\alpha_{u_z}(z) \subset \mathcal{E}$ et $\alpha_{u_z}(z)$ est connexe.

Démonstration du théorème de LaSalle

1) La fonction $t \mapsto \Phi(S(t)z)$ est décroissante et minorée car $\Phi(.)$ est une fonction continue sur X et que $\gamma^+(z)$ est relativement compacte dans X, donc $l \equiv \lim_{t\to+\infty} \Phi(S(t)z)$ existe.

2) Si $v \in \omega(z)$, il existe une suite $t_n \to +\infty$ telle que $S(t_n)z \to v$. Par continuité de $\Phi(.)$, $\Phi(S(t_n)z) \to \Phi(v)$. Donc $\Phi(v) = l$.

Ces deux assertions sont vraies même si la fonctionnelle de Lyapounov Φ n'est pas stricte.

3) Le théorème fondamental sur les ensembles ω-limites et la remarque ci-dessous impliquent que $\omega(z) \neq \emptyset$ et que $\delta_X(S(t)z, \omega(z)) \to_{t\to+\infty} 0$. De l'inclusion $S(t)\omega(z) \subset \omega(z)$, il suit que $\Phi(S(t)v) = l = \Phi(v)$, pour tout $t \in G^+$ et tout $v \in \omega(z)$. Et donc $v \in \mathcal{E}$. Les propriétés $\delta_X(S(t)z, \omega(z)) \to 0$, quand $t \to +\infty$, et $\omega(z) \subset \mathcal{E}$ entraînent que $\delta_X(S(t)z, \mathcal{E}) \to 0$, quand $t \to +\infty$.

4) La propriété 4) est démontrée dans G.R. (2002)

Remarque : Si $\gamma^+(z)$ est relativement compacte, le système $S(t)$ restreint à $\overline{\gamma^+(z)}$ est a.c.. Si $S(t)$ est un système dynamique sur X, a. c. et si l'orbite positive $\gamma^+(z)$ de $z \in X$ est bornée, alors $\gamma^+(z)$ est relat. comp.

Attracteur global d'un système gradient

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points d'équilibre de $S(t)$ et $e \in \mathcal{E}$. On introduit les ensembles instables suivants

$$\begin{aligned} W^u(\mathcal{E}) &= \{v \in X \,|\, \text{il existe une orbite négative } u_v \text{ of } S(t) \\ &\qquad \text{t.q. } u_v(0) = v \text{ et } \delta_X(u_v(-t), \mathcal{E}) \to_{t\to+\infty} 0\} \ , \\ W^u(e) &= \{w \in X \,|\, \text{il existe une orbite négative } u_w \text{ of } S(t) \\ &\qquad \text{t.q. } u_w(0) = w \text{ et } u_w(-t) \to_{t\to+\infty} e\} \ . \end{aligned}$$

Théorème (Attrateur global dans le cas gradient)

Soit $S(t)$ un système gradient, finalement borné et asymptotiquement compact sur X. Si l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné, alors $S(t)$ admet un attracteur global compact $\mathcal{A}$ et

$$\mathcal{A} = W^u(\mathcal{E}) \ .$$

Si $\mathcal{E}$ est un ensemble discret, $\mathcal{E} \equiv \{e_1, e_2, \cdots e_{n_0}\}$ est fini et $\mathcal{A} = \bigcup_{e_j \in \mathcal{E}} W^u(e_j)$.

Démonstration

1) Si $S(t)$ est finalement borné et a. c., alors l'orbite positive $\gamma^+(u_0)$ de tout $u_0 \in X$ est relativement compacte dans X et donc le principe d'invariance de LaSalle dit que $\omega(u_0)$ est inclus dans le borné $\mathcal{E}$. Donc $S(t)$ est ponctuellement dissipatif et d'après le théorème fondamental, il existe un attracteur global compact $\mathcal{A}$.
2) Pour montrer que $W^u(\mathcal{E}) \subset \mathcal{A}$, il suffit de montrer que si $u_v \in C^0(\mathbb{R}, X)$ est une orbite complète t.q. $u_v(0) = v$ et que $\delta_X(u_v(-t), \mathcal{E}) \to 0$ quand $t \to +\infty$, alors l'orbite complète $\gamma(v)$ est bornée. Puisque $S(t)$ est finalement borné, $\gamma^+(v)$ est bornée. En outre, comme $\delta_X(u_v(-t), \mathcal{E}) \to 0$ quand $t \to +\infty$, pour tout $\eta > 0$, il existe $T_\eta > 0$ tel que $u_v(-t) \in \overline{V_\eta}(\mathcal{E})$ pour tout $t \geq T_\eta$. Mais $u_v([-T_\eta, 0])$ est borné. Et donc $\gamma(v)$ est borné.
3) Soit maintenant $a \in \mathcal{A}$. Il existe une orbite bornée $u_a(t)$ telle que $u_a(0) = a$. Comme $\overline{u_a(\mathbb{R})} \subset \mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}$ est compact, il vient que $\alpha_{u_a}(a) \subset \mathcal{E}$.
4) $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ compact et discret $\rightsquigarrow$ fini. Si $a \in \mathcal{A}$, $\alpha_{u_a}(a)$ est un sous-ensemble connexe de $\mathcal{E}$ et donc est un seul point d'équilibre.

Remarque

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est discret, si $u_a \in C^0(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ est une orbite complète dans $\mathcal{A}$ passant par a, il existe des points d'équilibre e_j et e_k tels que $\alpha_{u_a}(a) = e_j$ et $\omega(a) = e_k$. Si a n'est pas un point d'équilibre, $\Phi(e_k) < \Phi(a) \leq \Phi(e_j)$. L'orbite qui relie les points e_j et e_k est appelée orbite hétérocline.

Exemple 1 de système gradient en dimension finie

Soit le système gradient sur $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

$$\frac{du}{dt} = \nabla G(u(t)) \ , \quad t > 0 \ , \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n \ ,$$

où $G \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. La fonction de Lyapounov stricte est $\Phi = -G$:

$$\frac{d}{dt}(\Phi(u(t)) = -\|\nabla G(u(t))\|^2_{\mathbb{R}^n} = -\|\frac{du}{dt}\|^2_{\mathbb{R}^n} \ .$$

Remarque : Si $n = 1$, toute solution $u(t)$, bornée sur $\mathbb{R}^+$, converge vers une limite u_l satisfaisant à $f(u_l) \equiv \nabla G(u_l) = 0$ quand $t \to \infty$.

Question : Dans le cas $n > 1$, quand a-t-on convergence ?

Exemple 2 de système gradient en dimension finie

2) On considère maintenant l'équation du second ordre sur $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \gamma \frac{du(t)}{dt} = \nabla G(u(t)), \ t > 0,$$
$$(u(0), \frac{du(0)}{dt}) = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ,$$

où $\gamma > 0$. On récrit l'équation sous la forme du système du premier ordre suivant sur $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: La fonctionnelle de Lyapounov stricte est :

$$\Phi((u, v)) = \frac{1}{2}\|v\|^2_{\mathbb{R}^n} - G(u) .$$

Dans le cas $n = 1$, toute solution $(u(t), u_t(t))$ globale et bornée sur $\mathbb{R}^+$, converge vers une limite $(u_l, 0)$, quand t tend vers l'infini.

Question : Dans le cas $n > 1$, quand a-t-on convergence ?

Convergence vers un équilibre dans $\mathbb{R}^n$

Théorème (Łojasiewicz, 1965)

Soit $F : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ analytique réelle dans $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ et a t.q. $\nabla F(a) = 0$. Alors il existe $C_a > 0$, $r_a > 0$ et $\theta_a \in (0, \frac{1}{2}]$ t. q.

$$\|\nabla F(x)\|_{\mathbb{R}^n} \ \geq\ C_a |F(x) - F(a)|^{1-\theta_a} \ , \quad \forall\ \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} \leq r_a$$

Si tous les points critiques a sont dans un compact de $\mathcal{O}$, C_a, r_a, et θ_a peuvent être choisis indépendamment de a.

Soit l'EDO

$$\dot{u}(t) + \nabla F(u(t)) = 0, \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Si $u(t)$ est une trajectoire globale (en temps positif) et bornée, alors $\omega(u_0)$ est un point unique a.
En effet, soit $u(t_n) \to a$ quand $n \to \infty$. Supposons que $\theta_a = 1/2$.

$$H(t) = F(u(t)) - F(a).$$

Alors $\frac{d}{dt} H(t) = -\|\nabla F(u(t))\|^2_{\mathbb{R}^n} \leq -C_0^2 H(t) \rightsquigarrow$ convergence.

Convergence vers un équilibre : L. Simon, A. Haraux, M. Jendoubi

Equation de la chaleur :

$$\begin{aligned} &\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t) + f(x,u(x,t)),\ x \in \Omega,\ t > 0, \\ &u(x,t) = 0,\ x \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

où f est telle que $f : (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ est analytique en y, uniformément en x et

$$f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R}) \ .$$

L'équation (5) donne lieu à un système gradient $S(t)$ de fontionnelle de Lyapounov stricte :

$$E_P(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \int_\Omega F(x,u)dx \ ,$$

En 1983, L. Simon a démontré l'inégalité de Łojasiewicz-Simon.

Théorème (Inégalité de Łojasiewicz-Simon)

Sous les hypothèses ci-dessus, si φ *appartient à l'ensemble des points d'équilibre* $\mathcal{E}$ *de* (5)*, il existe* $r_\varphi > 0$, $C_\varphi > 0$ *et* $\theta_\varphi \in (0, 1/2]$ *t.q. pour tout* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $\|u - \varphi\|_{W^{2,p}} \leq r_\varphi$,

$$\|\Delta u + f(u)\|_{L^2} \geq C_\varphi |E_P(u) - E_P(\varphi)|^{1-\theta_\varphi} .$$

En outre, L. Simon a montré que toute orbite bornée converge.

Théorème (L. Simon)

Si $u(t)$ *est une solution de* (5) *t.q. l'orbite positive* $\gamma^+(u_0)$ *soit relativement compacte dans* $W^{2,p}(\Omega)$*, alors il existe un équilibre* $\varphi_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ *t.q.* $\omega(u_0) = \{\varphi_0\}$.

La preuve donnée par L. Simon était assez compliquée. Elle a été beaucoup simplifiée par M. Jendoubi. Résultats de A. Haraux et M. Jendoubi pour les EDO du second ordre et pour l'équation des ondes avec dissipation, etc.. .

Point d'équilbre hyperbolique : définitions

Dorénavant, X est un Banach. Si pour tout $t \geq 0$, $S(t) \in C^m(X, X)$, le système dynamique est dit *de classe* C^m.

Définition

Soit $S(t)$ *de classe* C^1 *sur* X*, et* u_0 *un équilibre. La famille* $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ *définie par* $S_0(t) = D_{u_0}S(t)$ *est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur* X*, appelé système linéarisé au point d'équilibre* u_0*.*

La propriété de semi-groupe découle de la "règle de dérivation des fonctions composées"

Définition (équilibre hyperbolique)

Soit $S(t)$ *de classe* C^1 *et* $u_0 \in X$ *un point d'équilibre de* $S(t)$*. On dit que* u_0 *est hyperbolique si le système linéarisé* $S_0(t) = D_{u_0}S(t)$ *vérifie*

$$\sigma(S_0(1)) \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \emptyset \;, \tag{6}$$

où $\sigma(S_0(1))$ *désigne le spectre de* $S_0(1)$ *(Le choix* $t = 1$ *est sans importance)*

1) **Exemple type :** $S_0(t)$ semi-groupe linéaire C_0 dans X de générateur A et $f : X \to X$ une application lipschitzienne sur les bornés de X. On considère l'équation

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(u(t)) \, , \quad t > 0 \, , \quad u(0) = u_0 \in X \, , \qquad (7)$$

Cette équation possède une solution intégrale unique $u \in C^0([0, T^*(u_0)), X)$, où $T^*(u_0) \in (0, +\infty]$. On suppose que $T^*(u_0) = +\infty$, $\forall u_0 \in X$.On note $S(t)$ le système dynamique associé.
Point d'équilibre : On vérifie que $u_0 \in X$ est un équilibre ssi $u_0 \in D(A)$ et $Au_0 + f(u_0) = 0$
$S(t)$ de classe C^1 : Si $f \in C^1(X, X)$, alors $S(t) \in C^1(X, X)$ pour tout $t \geq 0$. Pour tout équilibre $u_0 \in X$, le système linéarisé $S_0(t)$ est le semi-groupe C_0 dans X engendré par l'opérateur $A + f'(u_0)$.

Système linéaire, cas C_0

Soit $\{S_0(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe (linéaire) fortement continu pour $t > 0$ vérifiant (6). Alors $\sigma_0 \equiv \sigma(S_0(1)) = \sigma_+ \cup \sigma_-$, où

$$\sigma_+ \ = \ \{z \in \sigma_0 \,|\, |z| > 1\} \ , \quad \sigma_- \ = \ \{z \in \sigma_0 \,|\, |z| < 1\} \ .$$

Soient P_+, P_- les projecteurs spectraux correspondants aux sous-ensembles σ_+, σ_-, c'est-à-dire

$$P_- \ = \ \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=1} (zI - S_0(1))^{-1} \underset{\cdot}{z} \ , \quad P_+ = I - P_- \ ,$$

Soit $X_+ = P_+ X$, $X_- = P_- X$, et donc $X = X_+ \oplus X_-$.
On a $S_0(t) X_\pm \subset X_\pm$ pour $t \geq 0$. Ainsi $S_0(t) = S_+(t) \oplus S_-(t)$ pour $t \geq 0$, où $S_\pm(t)$ sont les restrictions de $S_0(t)$ à $X_\pm$. Par construction, $S_\pm(t)$ sont des semi-groupes dans $X_\pm$, fortement continus pour $t > 0$, et $\sigma(S_\pm(1)) = \sigma_\pm$.
On suppose que $\sigma_\pm \neq \emptyset$. On définit

$$\rho_- \ = \ \sup\{|z| \,|\, z \in \sigma_-\} \ < \ 1 \ , \quad \rho_+ \ = \ \inf\{|z| \,|\, z \in \sigma_+\} \ > \ 1 \ .$$

Le rayon spectral de $S_-(t)$ dans X_- est égal à ρ_-^t pour tout $t > 0$.
D'autre part, comme $0 \notin \sigma(S_+(1))$, $S_+(1)$ est inversible dans $\mathcal{L}(X_+)$ et le rayon spectral de $(S_+(1)^{-1}) = \rho_+^{-1}$. Donc $S_+(t)$ se prolonge en un groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X_+, et le rayon spectral de $S_+(-t)$ est égal à ρ_+^{-t} pour tout $t > 0$. On conclut que le spectre de $S_0(t)$ vérifie

$$\sigma(S_0(t)) \subset \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq \rho_-^t\} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \geq \rho_+^t\} \ , \quad t > 0 \ ,$$

donc, en particulier, $\sigma(S_0(t)) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \emptyset$ pour tout $t > 0$.
Soient λ_+, λ_- tels que $\rho_- < e^{\lambda_-} < 1 < e^{\lambda_+} < \rho_+$.
Il existe alors des constantes $M_+, M_- \geq 1$ telles que

$$\|S_-(t)\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq M_- e^{\lambda_- t} \ , \quad \|S_+(-t)\|_{\mathcal{L}(X_+)} \leq M_+ e^{-\lambda_+ t} \ , \quad t \geq 0 \, ,$$

Les sous-espaces $X_\pm$ de X peuvent être caractérisés comme suit :

$$\begin{aligned} X_- &= \{v \in X \,|\, S_0(t)v \to_{t\to+\infty} 0\} \ , \\ X_+ &= \{w \in X \,|\, \text{il existe une trajectoire négative } u \text{ de } S_0 \\ &\qquad \text{telle que } u(0) = w \text{ et } u(t) \to_{t\to-\infty} 0\} \ . \end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach, $S(t)$ un système dynamique de classe C^1, et $u_0 \in X$ un point d'équilibre hyperbolique. Les ensembles

$$
\begin{aligned}
W^s(u_0) &= \mathcal{V}_- = \{v \in X | S(t)v \rightarrow_{t \to +\infty} u_0\}\ , \\
W^u(u_0) &= \mathcal{V}_+ = \{w \in X | \text{ il existe une trajectoire négative } u \text{ de } S(t) \\
&\qquad \text{telle que } u_w(0) = w \text{ et } u_w(t) \rightarrow_{t \to -\infty} u_0\}
\end{aligned}
$$

sont appelés respectivement ensembles *stable* et *instable* de l'équilibre u_0.

On va montrer que, si l'on restreint le système dynamique $S(t)$ à un voisinage du point d'équilibre u_0, alors les ensembles $\mathcal{V}_\pm$ sont en fait des morceaux de variété tangents au point u_0 aux sous-espaces $X_\pm$ définis dans l'exemple ci-dessus à partir du système linéarisé $S_0(t) = D_{u_0}S(t)$.

Théorème des variétés stable et instable locales (1)

Cadre de l'exemple type (7) On fait les hypothèses :
H1) Hyperbolicité : $\sigma(S_0(1)) \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \emptyset$. En particulier, si $X_\pm$, il existe des constantes $\lambda_- < 0 < \lambda_+$ et $M_-, M_+ \geq 1$ t.q., pour tout $t > 0$

$$\|S_-(t)\|_{\mathcal{L}(X_-)} \leq M_- e^{\lambda_- t} \ , \quad \|S_+(-t)\|_{\mathcal{L}(X_+)} \leq M_+ e^{-\lambda_+ t} \ , \quad (8)$$

On va supposer, pour simplifier que $M_+ = M_- = 1$. En effet, sinon on munit $X_\pm$ des normes équivalentes (à vérifier)

$$|u|_- = \sup_{t \geq 0} \|S_-(t)u\|_{X_-} e^{-\lambda_- t} \ , \ u \in X_- \ ,$$

$$|u|_+ = \sup_{t \leq 0} \|S_+(t)u\|_{X_+} e^{-\lambda_+ t} \ , \ u \in X_+ \ .$$

Si $M_+ = M_- = 1$, on munit simplement X de la norme équivalente

$$|||u|||_X = \max(\|P_+ u\|_+, \|P_- u\|_-) \ , \quad u \in X \ ,$$

où $P_\pm$ sont les projecteurs spectraux. En fait, on notera $|||.|||_X$ simplement par $\|.\|_X$.

Théorème des variétés stable et instable locales (2)

Pour $r > 0$, soit $B(r), B_\pm(r)$ les boules fermées de rayon r centrées à l'origine dans X et $X_\pm$.

La deuxième hypothèse porte sur f :
H2) La non-linéarité f est de classe $C^k(X,X)$ $(1 \leq k \leq +\infty)$ et $f(0)=0$, $D_0 f = 0$. Soit $\ell_\pm(r)$ les constantes de Lipschitz de $f_\pm = P_\pm f$ sur la boule $B(r)$:

$$\|f_\pm(u_1) - f_\pm(u_2\|_X \leq \ell_\pm(r)\|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in B(r) \ .$$

Par hypothèse, $\ell_\pm(r) \to 0$ lorsque $r \to 0$.

Théorème (Variétés stable et instable locales)

Sous les hypothèses (H1) et (H2), il existe $r > 0$ *assez petit, t.q.*
1) Il existe $h_- : B_-(r) \to B_+(r)$ *(unique) de classe* C^k *t.q.*
$h_-(0) = 0$, $Dh_-(0) = 0$, *dont le graphe* $\mathcal{V}_-(r) \subset B(r)$ *satisfait à :*
i) $\mathcal{V}_-(r) = \{u_0 \in B(r) \,|\, S(t)u_0 \in B(r)$ *pour tout* $t \geq 0\}$,
ii) Si $u_0 \in \mathcal{V}_-(r)$ *et* $u(t) = S(t)u_0$, *alors*

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|u(t)\|_X \leq \lambda_- .$$

2) Il existe $h_+ : B_+(r) \to B_-(r)$ *(unique) de classe* C^k *t. q.*
$h_+(0) = 0$, $Dh_+(0) = 0$, *dont le graphe* $\mathcal{V}_+(r) \subset B(r)$ *satisfait à :*
i) $\mathcal{V}_+(r) = \{u_0 \in B(r) \,|\, \exists$ *une trajectoire négative*
$u \in C^0((-\infty, 0], X)$ *t. q.* $u(0) = u_0$ *et* $u(t) \in B(r)$, $\forall t \leq 0\}$.
ii) Si $u_0 \in \mathcal{V}_+(r)$, *il existe une unique trajectoire négative*
$u \in C^0((-\infty, 0], X)$ *t. q.* $u(t) \in B(r)$, $\forall t \leq 0$, *et*

$$\limsup_{t \to -\infty} \frac{1}{|t|} \log \|u(t)\|_X \leq -\lambda_+ .$$

Théorème des variétés stable et instable locales (4)

Remarque

1) On a : $h_\pm(B_\pm(r) \cap D(A)) \subset B_\mp(r) \cap D(A)$*.*
2) Le théorème précédent montre que $B(r)$ *ne contient pas d'autre équilibre que* 0 *(i.e. un équilibre hyperbolique est toujours isolé).*
3) La preuve du théorème comporte deux grandes étapes : la construction des variétés $\mathcal{V}_\pm$ *et la démonstration de leur régularité* C^k*. Dans la 1ère étape, il suffit de supposer que* $f(0) = 0$*, que* f *est lipschitzienne et que* $\ell_\pm(r) \to 0$ *lorsque* $r \to 0$ *(en particulier,* f *est différentiable à l'origine, de dérivée nulle). Sous ces hypothèses, on va construire des applications* $h_\pm$ *lipschitziennes t. q.* $h_\pm(0) = 0$*,* $Dh_\pm(0) = 0$ *et satisfaisant à (i) et (ii).*
4) Application à l'équation des ondes avec dissipation.

On commence par le cas de la variété *stable* locale. On rappelle l'équation intégrale associée à (7)

$$u(t) = S_0(t)u(0) + \int_0^t S_0(t-s)f(u(s))ds \ , \quad t \geq 0 \ . \qquad (9)$$

Démonstration (Lemme 1)

Lemme (Lemme 1)

Soit $R > 0$ et $u \in C^0([0, +\infty), X)$ tel que $u(t) \in B(R)$ pour tout $t \geq 0$. Alors u est une solution de (9) ssi pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} P_- u(t) = u_-(t) \;&=\; S_-(t)\xi + \int_0^t S_-(t-s) f_-(u(s)) ds \ , \\ P_+ u(t) = u_+(t) \;&=\; -\int_t^\infty S_+(t-s) f_+(u(s)) ds \ , \end{aligned} \tag{10}$$

où $\xi = P_- u_0 = u_-(0)$.

Démonstration

1) Soit u vérifiant (9). On obtient la 1ère équation de (10) en projetant sur X_-. De même, pour $0 \leq t \leq T$, on a

$$u_+(T) = S_+(T-t)u_+(t) + \int_t^T S_+(T-s)f_+(u(s))ds \ ,$$

donc (puisque S_+ est un groupe)

$$u_+(t) = S_+(t-T)u_+(T) - \int_t^T S_+(t-s)f_+(u(s))ds \ .$$

Si on note que $\|S_+(t-T)u_+(T)\|_{X_+} \leq e^{\lambda_+(t-T)}R$ tend vers 0, quand T tend vers $+\infty$, on obtient la 2ème équation dans (10).

2) Soit u solution de (10), alors pour tout $t \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
&S_+(t)u_+(0) + \int_0^t S_+(t-s)f_+(u(s))ds \\
&= S_+(t)\left(-\int_0^\infty S_+(-s)f_+(u(s))ds\right) + \int_0^t S_+(t-s)f_+(u(s))ds \\
&= -\int_t^\infty S_+(t-s)f_+(u(s))\underset{.}{s} = u_+(t) \ .
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

Pour $\beta \in (\lambda_-, 0]$, on définit l'espace de fonctions

$$Z_\beta = \{u \in C^0([0,+\infty), X) \mid \|u\|_\beta = \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|_X e^{-\beta t} < \infty\} \ .$$

Pour $R > 0$, on note $Z_\beta(R) = \{u \in Z_\beta \mid \|u\|_\beta \leq R\}$ et

$$K_\beta(R) = \max\left(\frac{\ell_-(R)}{\beta - \lambda_-}, \frac{\ell_+(R)}{\lambda_+ - \beta}\right)$$

Lemme (Lemme 2)

Soient $\beta \in (\lambda_-, 0]$ et $r > 0$ tels que $K_\beta(r) < 1$. Alors pour tout $\xi \in B_-(r)$, l'équation (10) possède une unique solution $u \in Z_\beta(R)$. En outre, $\|u\|_\beta \leq \|\xi\|_{X_-}$.

Démonstration

Argument de point fixe par contraction stricte : Soit $\xi \in B_-(r)$. Pour tout $u \in Z_\beta(r)$, on définit $\mathcal{F}u \in C^0([0,+\infty),X)$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}u)_-(t) &= S_-(t)\xi + \int_0^t S_-(t-s)f_-(u(s))ds \; , \\ (\mathcal{F}u)_+(t) &= -\int_t^\infty S_+(t-s)f_+(u(s))ds \; .\end{aligned} \tag{11}$$

Comme $\|u(t)\|_X \le \|u\|_\beta e^{\beta t} \le r$, on a :

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}u)_-(t)\|_{X_-} &\le e^{\lambda_- t}\|\xi\|_{X_-} + \int_0^t e^{\lambda_-(t-s)}\ell_-(R)\|u\|_\beta e^{\beta s}ds \\ &\le e^{\lambda_- t}\|\xi\|_{X_-} + \frac{\ell_-(R)\|u\|_\beta}{\beta-\lambda_-}(e^{\beta t}-e^{\lambda_- t}) \\ &\le e^{\beta t}\max(\|\xi\|_{X_-}, \frac{\ell_-(R)\|u\|_\beta}{\beta-\lambda_-}) \; .\end{aligned} \tag{12}$$

Démonstration (suite)

De même,

$$\|(\mathcal{F})_+(t)\|_{X_+} \leq \int_t^\infty e^{\lambda_+(t-s)}\ell_+(R)\|u\|_\beta e^{\beta s}\d{s} \;=\; e^{\beta t}\frac{\ell_+(R)\|u\|_\beta}{\lambda_+ - \beta} \ ,$$

donc $\|(\mathcal{F}u)_+(t)\|_{X_+} \leq e^{\beta t}K_\beta(r)\|u\|_\beta$. Donc $\mathcal{F}u \in Z_\beta$ et les estimations ci-dessus impliquent

$$\|\mathcal{F}u\|_\beta \leq \max(\|\xi\|_{X_-}, K_\beta(R)\|u\|_\beta) \leq r \ , \tag{13}$$

donc l'application $\mathcal{F}$ laisse invariante la boule $Z_\beta(R)$. Enfin, si $u_1, u_2 \in Z_\beta(R)$, un calcul analogue à (12) donne

$$\|\mathcal{F}u_1 - \mathcal{F}u_2\|_\beta \leq K_\beta(R)\|u_1 - u_2\|_\beta < \|u_1 - u_2\|_\beta \ ,$$

donc l'application $\mathcal{F}$ est une contraction stricte dans $Z_\beta(r)$ et admet un unique point fixe $u(t,\xi) \in Z_\beta(r)$. Comme $u \in Z_\beta(r)$ est une solution de (10) ssi u est un point fixe de $\mathcal{F}$, on a montré que (10) a une unique solution $u(.,\xi) = \mathcal{F}u(.,\xi) \in Z_\beta(r)$. Et (13) implique que

$$\|u(.,\xi)\|_\beta \leq \|\xi\|_{X_-}$$

Sous les hypothèses du lemme 2, on pose

$$h_-(\xi) \;=\; P_+ u(0;\xi) \;, \quad \xi \in B_-(r) \;. \tag{14}$$

Lemme (Lemme 3)

Sous les hypothèses du lemme 2, l'application $h_- : B_-(r) \to X_+$ *est lipschitzienne :*

$$\|h_-(\xi_1) - h_-(\xi_2)\|_{X_+} \le K_\beta(r)\|\xi_1 - \xi_2\|_{X_-} \;, \forall \xi_1, \xi_2 \in B_-(r) \;. \tag{15}$$

Démonstration : Soit $u_j(t) = u(t, \xi_j)$. En procédant comme au lemme 2, on a :

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{X_-} \le e^{\beta t} \max(\|\xi_1 - \xi_2\|_{X_-}, \frac{\ell_-(r)}{\beta - \lambda_-}\|u_1 - u_2\|_\beta),$$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{X_+} \le e^{\beta t} \frac{\ell_+(r)}{\lambda_+ - \beta}\|u_1 - u_2\|_\beta.$$

D'où, $\|u_1 - u_2\|_\beta \le \|\xi_1 - \xi_2\|_{X_-}$. Donc,
$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{X_+} \le e^{\beta t} K_\beta(r)\|\xi_1 - \xi_2\|_{X_-}$ et le résultat en posant $t = 0$.

Fin de la démonstration

Soit maintenant $r > 0$ assez petit pour que $K_0(r) < 1$, On pose

$$\mathcal{V}_-(r) = \{\xi + h_-(\xi) | \xi \in B_-(r)\} ,$$

1) Lemmes 2 et 3 $\rightsquigarrow$ $h_-(0) = 0$ et $h_-(B_-(r)) \subset B_+(r)$.
Pour tout $r^* \leq r$, la constante de Lipschitz de h_- sur $B_-(r^*)$ est bornée par $K_0(r^*)$ qui tend vers 0 si $r^* \to 0$. D'où h_- est différentiable en 0 et $Dh_-(0) = 0$.
2) La caractérisation (i) du théorème découle des lemmes 1 et 2.
3) Par continuité, il existe $\beta \in (\lambda_-, 0)$ tel que $K_\beta(r) < 1$. Si $u_0 \in \mathcal{V}_-(r)$, les lemmes 1 et 2 impliquent que $u(t) = S(t)u_0 \in Z_\beta(r)$, donc $u(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Soit $\beta^* > \lambda_-$ et $r^* \leq r$ assez petit pour que $K_{\beta^*}(r^*) < 1$. Il existe $t_0 \geq 0$ t. q. $u(t_0) \in B(r^*)$. Soit $v(t) = u(t + t_0) = S(t)u(t_0)$, le lemme 2 dit que $v \in Z_{\beta^*}(r^*)$, donc

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|v(t)\|_X = \limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log \|u(t)\|_X \leq \beta^* .$$

Comme $0 > \beta^* > \lambda_-$ est quelconque, on a montré ii).

Changements dans le cas de la variété instable

Lemme (Lemme 1 Bis)

Soit $R > 0$ et $u \in C^0((-\infty, 0], X)$ tel que $u(t) \in B(R)$, $\forall t \leq 0$. Alors u est une trajectoire négative de (9) ssi pour tout $t \leq 0$,

$$\begin{aligned} P_- u(t) = u_-(t) \ &= \int_{-\infty}^{t} S_-(t-s) f_-(u(s)) ds \ , \\ P_+ u(t) = u_+(t) \ &= \ S_+ \eta - \int_{t}^{0} S_+(t-s) f_+(u(s)) ds \ , \end{aligned} \tag{16}$$

où $\eta = P_+ u_0 = u_+(0)$.

Pour $\beta \in [0, \lambda_+)$, on définit l'espace de fonctions

$$Z_\beta = \{u \in C^0((-\infty, 0]), X) \,|\, \|u\|_\beta \ = \ \sup_{t \leq 0} \|u(t)\|_X e^{-\beta t} < \infty\} \ .$$

Pour $R > 0$, on note $Z_\beta(R) = \{u \in Z_\beta \,|\, \|u\|_\beta \leq R\}$.

Lemme (Lemme 2 Bis)

Soient $\beta \in [0, \lambda_+)$ et $r > 0$ t. q. $K_\beta(r) < 1$. Alors $\forall \eta \in B_+(r)$, l'équation (16) a une unique solution $u \in Z_\beta(R)$ et $\|u\|_\beta \leq \|\eta\|_{X_+}$.