Cours III: Applications - Dynamique de l'équation de Klein-Gordon radiale focalisante

Geneviève Raugel

CNRS et Université Paris-Sud

Master Class, Strasbourg, Janvier 2018

En collaboration avec Nicolas Burq et Wilhelm Schlag

L'équation de Klein-Gordon focalisante : cas sous-critique

Soit $\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3)$, $1 < p < 5$ (souvent on prendra $p = 3$).
On considère l'équation de Klein-Gordon avec ou sans amortissement $\alpha \geq 0$:

$$\begin{aligned} & u_{tt} + 2\alpha u_t - \Delta u + u - |u|^{p-1} u = 0, \ x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\ & (u(x,0), u_t(x,0)) = (u_0(x), u_1(x)) \in \mathcal{H}, \end{aligned} \tag{1}$$

qu'on écrit sous la forme d'un système du 1er ordre

$$\vec{u}_t(t) \equiv \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ \Delta - Id & 2\alpha Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^{p-1} u \end{pmatrix}, \vec{u}(0) = \vec{u}_0$$

ou

$$\vec{u}_t = B_\alpha \vec{u} + F(\vec{u}) \ , \vec{u}(0) = \vec{u}_0.$$

L'e.q. $\vec{u}_t = B_\alpha \vec{u}$ définit un groupe C^0 (linéaire) $\Sigma_\alpha(t) \equiv e^{B_\alpha t}$.

Rappel : $\vec{u}(t) = (u(t), u_t(t)) \in C^0([-T, T], \mathcal{H})$ est une solution intégrale de (1) si, $\forall t \in [-T, T]$,

$\vec{u}(t) \equiv S_\alpha(t)\vec{u}_0 = e^{B_\alpha t}\vec{u}_0 + \int_0^t e^{B_\alpha(t-s)} F(\vec{u}(s)) ds,$ formule de Duhamel

Existence locale et globale I : $\alpha \geq 0$

Théorème (Existence locale)

1) $\vec{u}_0 \in \mathcal{H}$, $\exists T \geq T_0(\|\vec{u}_0\|_{\mathcal{H}}) > 0$ *et une unique solution intégrale* $S_\alpha(t)\vec{u}_0 \in C^0([-T, T], \mathcal{H}) \cap L^p((-T, T); L^{2p}_x) \cap L^5((-T, T); L^{10}_x)$.

2) Continuité par rapport à $\vec{u}_0$ *; propagation de la régularité.*

3) La fonctionnelle d'énergie $E(u(t), u_t(t)) \in C^1([0, T])$ *vérifie*

$$\frac{d}{dt}(E(u(t), u_t(t))) = -2\alpha\|u_t(t)\|^2_{L^2} \leq 0, \quad \text{où}$$

$$E(\varphi, \psi) \equiv \int_{\mathbb{R}^3} (\frac{1}{2}(|\psi|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2) - \frac{1}{p+1}|\varphi|^{p+1}) dx.$$

4) Les solutions globales sont bornées dans $\mathcal{H}$ *(pour* $1 < p \leq 3$*, Cazenave, JFA (1985))*

Conservation de l'énergie si $\alpha = 0$. Fonctionnelle de Lyapounov stricte si $\alpha > 0$. Comportement en temps long ?

Remarques

On posera souvent $f(u) = |u|^{p-1}u$.

Pour l'équation des ondes sur un ouvert borné, nous avions supposé que $f \in \mathcal{L}(H^1, L^2)$. Ici, ce n'est plus le cas pour $3 < p \leq 5$, car en dimension $d = 3$, on a seulement l'inclusion de Sobolev,

$$H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^3) \ , \ 2 \leq q \leq 6.$$

Ici, on utilisera les estimations de Strichartz classiques pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^d$:

$$v_{tt}(t) + 2\alpha v_t - \Delta v(t) + v(t) = h(t) \ , \qquad \vec{v}(0) = (v_0, v_1) \in \mathcal{H} \ , \tag{2}$$

où $h(t) \in L^1((0,\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$.

Proposition (Inégalités de Strichartz)

Pour tout $d \geq 1$, la solution v de l'eq. KG (2) satisfait à

$$\sup_{t\geq 0} \|\vec{v}(t)\|_{H^1\times L^2} \leq C_0\Big[\|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} + \int_0^\infty \|h(s)\|_{L^2}\, ds\Big]$$

Proposition (Suite de la proposition)

et, en dimension $d \geq 2$, aux estimations de Strichartz

$$\|v\|_{L_t^{q_0} L_x^{p_0}} \leq C_0^* \left[\|(v_0, v_1)\|_{\mathcal{H}} + \|h\|_{L_t^1 L_x^2} \right] ,$$

où $\frac{1}{q_0} + \frac{d}{p_0} = \frac{d}{2} - 1$, $2 \leq p_0 < \infty$, $2 \leq q_0$, *et* $\frac{1}{q_0} + \frac{d-1}{2p_0} \leq \frac{d-1}{4}$.

L'existence locale de solutions de KGNL (1) se démontre par un argument de point fixe de contraction stricte pour $T > 0$ petit :

$$Y = \{ \vec{u} \in L^\infty((-T, +T), \mathcal{H}) \text{ avec } u \in L^{\theta^*}((-T, T), L^{2\theta^*}(\mathbb{R}^d)) \\ \mid \|u\|_{L^\infty(H^1) \cap W^{1,\infty}(L^2) \cap L^{\theta^*}(L^{2\theta^*})} \leq M_0 \} ,$$

où $\theta^* = \frac{d+2}{d-2}$. On fixe $\vec{u}_0 \in \mathcal{H}$ t.q. $\|\vec{u}_0\|_{\mathcal{H}} < k_0$ et on définit

$$\mathcal{F} : (\vec{u}_0, \vec{u}) \in B_{\mathcal{H}}(0, k_0) \times Y \mapsto \mathcal{F}(\vec{u}_0, \vec{u}) \in Y ,$$

$$(\mathcal{F}(\vec{u}_0, \vec{u}))(t) = \Sigma_\alpha(t)\vec{u}_0 + \int_0^t \Sigma_\alpha(s)(0, f(u(s)))\, ds .$$

On utilisera Strichartz avec $(p_0, q_0) = (2\theta^*, \theta^*)$. Ici M_0 et k_0 bien choisis.

Existence globale II : $\alpha \geq 0$

Théorème (Existence globale ou explosion)

1) Si $\|\vec{u}_0\|_{\mathcal{H}} \ll 1$, alors on a existence globale et $\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^+,L^{2p}(\mathbb{R}^3))} < +\infty$
2) On suppose que $T^* = \infty$ et $\|u\|_{L^p((0,+\infty),L^{2p}(\mathbb{R}^3))} < \infty$, alors,
- si $\alpha = 0$, on a diffusion (scattering) , i.e., il existe $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in \mathcal{H}$ t.q.,

$$S_0(t)\vec{u}_0 \equiv \vec{u}(t) = \Sigma_0(t)(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1) + o_{\mathcal{H}}(1), \quad t \to \infty,$$

- si $\alpha > 0$, $S_\alpha(t)\vec{u}_0 \to 0, \quad t \to \infty$.

Données petites : existence globale et diffusion (ou convergence vers 0)
Données grandes : on peut avoir explosion en temps fini.
Cas plus simple des données radiales : On se restreint à l'espace $\mathcal{H}_{rad}$

Le cas critique $\Box u = u^5$

Théorème (Duyckaerts-Kenig-Merle (2012))

Soit u une solution radiale de $u_{tt} - \Delta u = u^5$ avec données initiales dans $\dot{H}^1 \times L^2$. Alors, ou bien,

- *u explose en temps fini $T^+ < +\infty$,*
- *ou bien u est globale et il existe une solution $v(t) \in \dot{H}^1 \times L^2$ de l'équation linéaire l, $J \in \mathbb{N}$, et, pour $j = 1, \cdots, J$, un signe ϵ_j et des fonctions*

$$0 < \lambda_1(t) << \lambda_2(t) << \cdots << \lambda_J(t) << t, \text{ quand } t \to \infty$$

t.q.

$$\lim_{t \to +\infty} \|(u, \partial_t u) - (v(t) + \sum_j \frac{\epsilon_j}{\sqrt{\lambda_j(t)}} W(\frac{x}{\lambda_j(t)}), \partial_t v(t))\|_{\dot{H}^1 \times L^2} = 0,$$

où $W(x) = (1 + \frac{|x|^2}{3})^{-\frac{1}{2}}$ vérifie $\Delta u = u^5$.

Cas sous-critique : solution fondamentale $\pm Q$, $(p = 3)$

Solution stationnaire $u(t,x) = \varphi(x)$ de KGNL est une solution de l'équation elliptique

$$-\Delta\varphi + \varphi = \varphi^3 \tag{3}$$

Problème de minimisation : $\inf\{\|\varphi\|^2_{H^1} \mid \varphi \in H^1,\ \|\varphi\|_{L^4} = 1\}$ a une solution radiale $\varphi_\infty > 0$, qui décroît exponentiellement, $Q = \lambda\varphi_\infty$ vérifie (3) pour un certain $\lambda > 0$ (Z. Nehari, 1963).
Coffman (1972) : **unicité de la solution radiale positive** Q

Energie stationnaire : $J(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi^4\right) dx$

Fonctionnelle de Néhari :
$K_0(\varphi) = \langle J'(\varphi)|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla\varphi|^2 + \varphi^2 - \varphi^4)(x)\,dx$

Caractérisation variationnelle

$$J(Q) = \inf\{J(\varphi) \mid \varphi \in H^1 \setminus \{0\},\ K_0(\varphi) = 0\} \tag{4}$$

Les inf. sont atteints seulement en $\pm Q$, à translation près.
Existence d'un nombre infini de solutions nodales régulières de (3) (Berestycki and P.- L. Lions, ARMA, 1983)

Critère de Payne-Sattinger : $\alpha \geq 0$

Décomposition positivement invariante si $\alpha > 0$ (invariante si $\alpha = 0$) de $E < J(Q)$: (Payne-Sattinger 1975)

$$\mathcal{PS}_+ := \{(u_0, u_1) \in \mathcal{H} \mid E(u_0, u_1) < J(Q),\ K_0(u_0) \geq 0\}$$
$$\mathcal{PS}_- := \{(u_0, u_1) \in \mathcal{H} \mid E(u_0, u_1) < J(Q),\ K_0(u_0) < 0\}$$

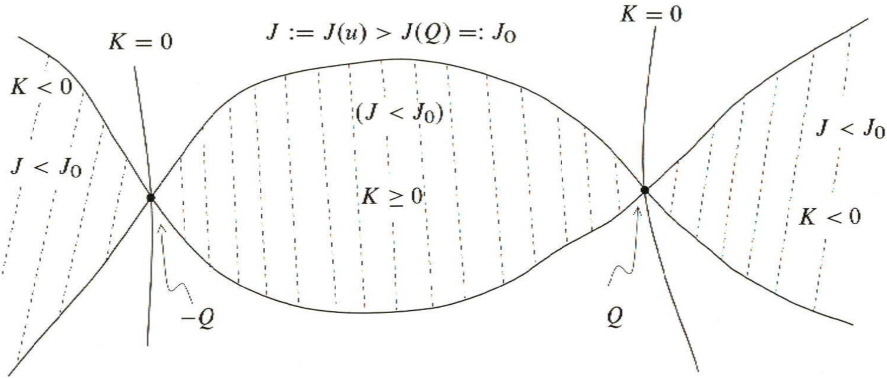
Dans $\mathcal{PS}_+$, **existence globale** pour $t \geq 0$: $K_0(u(t)) \geq 0$ entraîne

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|u_t(t)\|_2^2 = 4E(\vec{u}(t)) - (K_0(u(t)) + \|u_t(t)\|_2^2) \leq 4E(\vec{u}(t)).$$

Dans $\mathcal{PS}_-$, **explosion en temps fini**. $(-K_0(u(t)) \geq \delta > 0)$
Argument de convexité valable pour $\alpha \geq 0$ avec la fonction auxiliaire $y^\alpha(t) \equiv \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds$. Pour $\alpha = 0$, on a :

$$y_{tt}^0 = \|u_t\|_2^2 - K_0(u) = 3\|u_t\|_2^2 + \|u\|_{H^1}^2 - 4E(U) > \delta.$$

Alors, $y_t^0(t)$ et $y^0(t)$ tendent vers $+\infty$ si $t \to +\infty$. On montre que, pour $t \geq t_0$, $\partial_t(y^{-1/2})(t) \leq \partial_t(y^{-1/2})(t_0) < 0$ et qu'il existe $t_1 > 0$ t.q. $(y^{-1/2})(t_1) = 0$.



Régions $J(u) < J(Q)$ suivant le signe de $K = K_0$

Même figure pour $E(u, u_t) < J(Q)$. Les solutions sont prises au piège dans les régions $K_0 \geq 0$ ou $K_0 < 0$.

Payne-Sattinger (1975) : Si $E(u_0, u_1) < E(Q, 0)$, on a la dichotomie : $K_0(u_0) \geq 0$, existence globale, $K_0(u_0) < 0$, explosion en temps fini.
Ibrahim-Masmoudi-Nakanishi (2010) : Diffusion si $K_0(u_0) \geq 0$.

Théorème de Nakanishi et Schlag quand $\alpha = 0$

Théorème (Nakanishi, Schlag (2011))

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ t. q. si

$$E(u_0, u_1) < E(Q, 0) + \varepsilon_0, \quad \textit{Hypothèse d'énergie}$$

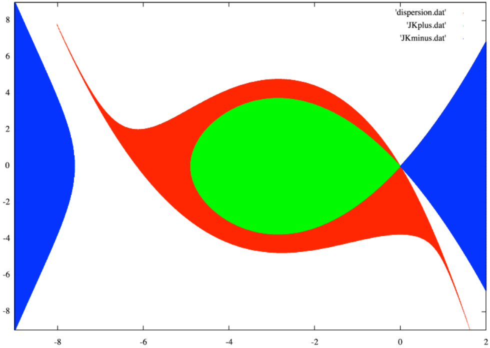
alors, $\vec{u}(t) = S_0(t)(u_0, u_1)$ a le comportement suivant, soit

1. *explosion en temps fini*
2. *existence globale et diffusion vers* 0
3. *existence globale et diffusion vers* $(\pm Q, 0)$ *:*
   $\vec{u}(t) = (\pm Q, 0) + (v(t), v_t(t)) + o_{\mathcal{H}}(1)$ *quand* $t \to \infty$, *où*
   $(v(t), v_t(t)) = \Sigma_0(t)(v_0, v_1) \in \mathcal{H}$

Les 9 combinaisons de cette trichotomie ont lieu quand $t \to \pm\infty$.

La variété centrale stable de $(\pm Q, 0)$ **(de codimension** 1**) est unique et régulière** Elle donne lieu à (3) et sépare les deux régions ouvertes (1) et (2). Existence de variétés fortement stable et instable de dimension 1 de $(\pm Q, 0)$.

Coupe 2d (Donninger, Schlag)



$$(Q + Ae^{-r^2}, Be^{-r^2})$$

- soliton en $(A, B) = (0, 0)$, (A, B) varient dans $[-9, 2] \times [-9, 9]$
- ROUGE : existence globale, BLANC : explosion en temps fini, Vert : $\mathcal{PS}_+$, BLEU : $\mathcal{PS}_-$
- Résultats dans un voisinage de $(Q, 0)$.

Théorème dans le cas $\alpha > 0$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points d'équilibre de (1) dans $\mathcal{H}_{rad}$.

Théorème (Théorème 1, Burq, Schlag, G.R., 2015)

Soit $\alpha > 0$. Soit $\vec{u}_0 \in \mathcal{H}_{rad}$, alors

1. *ou bien $\vec{u}(t) = S_\alpha(t)\vec{u}_0$ explose en temps fini,*
2. *ou bien $\vec{u}(t)$ existe globalement et converge vers un point d'équilibre $(Q^*, 0) \in \mathcal{E}$ (convergence exponentielle).*

Démonstration : arguments fonctionnels et de systèmes dynamiques

Le théorème reste vrai en dimension $d \leq 6$ et pour des non–linéarités H^1 sous-critiques f satisfaisant à la condition d'Ambrosetti-Rabinowitz : il existe $\gamma > 0$ t.q.

$$\int f(v)v - (2 + 2\gamma) \int \mathcal{F}(v)dx \geq 0 \,, \quad \forall v \in H^1,$$

où $\mathcal{F}$ est la primitive de f.

On peut ôter la "condition radiale" et obtenir des résultats partiels en utilisant la compacité par concentration (voir Ze Li et Lifeng Zhao). Mais hypothèse de solutions bornées.

Argument de convexité de Payne-Sattinger pour KG amortie

$$K_0(\phi) = \|\nabla_x \phi\|_{L^2}^2 + \|\phi\|_{L^2}^2 - \|\phi\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

Lemme

On suppose qu'une solution u satisfait à $K_0(u) \leq -\delta < 0$ sur son intervalle maximal d'existence $[0, T^+)$. Alors $T^+ < +\infty$.

Conséquence : S'il existe t_0 t.q. $E(\vec{u}(t_0)) < 0$, la solution explose en temps fini

$$K_0(u(t)) = 2E(\vec{u}(t)) - \|u_t(t)\|_{L^2}^2 - (1 - \frac{2}{p+1})\|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq E(\vec{u}(t_0))$$

Preuve du lemme : on utilise à nouveau des arguments de convexité pour la fonctionnelle

$$y(t) = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \int_0^t \|u\|_{L^2}^2(s)ds.$$

inspirés par ceux de Payne-Sattinger.

On raisonne par l'absurde. Si $\vec{u}(t)$ est une solution globale t.q. $K_0(u(t)) \leq -\delta$, on a :

$$y_{tt}(t) = \|u_t(t)\|_{L^2} - K_0(u(t)) \tag{5}$$

ce qui imlique que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$. En utilisant (5) et l'égalité

$$E(\vec{u}(t)) = E(\vec{u}(0)) - \alpha \int_0^t \|u_t(s)n\|_{L^2}^2 ds$$

on montre que (avec un $\gamma > 0$ dépendant de p)

$$\begin{aligned} y_{tt}(t) \geq (2+\gamma)\|u_t(t)\|_{L^2}^2 + \gamma\|u(t)\|_{H^1}^2 - 2(1+\gamma)E(\vec{u}(0)) \\ + 4\alpha(1+\gamma)\int_0^t \|u_t(s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned} \tag{6}$$

Après quelques calculs, on montre qu'il existe $c > 1$ t.q.

$$y_{tt}(t)y(t) - cy_t^2(t) > 0 \ , \text{ pour } t > 0 \text{ assez grand } ,$$

et donc, pour $t > 0$ assez grand,

$$\frac{d^2}{dt^2}(y^{-(c-1)}(t) = -(c-1)y^{-c-1}(t)(y_{tt}(t)y(t) - c(y_t)^2(t)) < 0.$$

Existence d'un équilibre dans l'ensemble ω-limite

Etape 1. $\exists$ **suite de temps** $t_n \to +\infty$ **t.q.** $K_0(u(t_n)) \to 0$**.**

On a distingue deux cas de trajectoires :

- Trajectoire bornée (B)
- Trajectoire non-bornée (U)
- Case (U) : si $K_0(u(t)) \geq 0$ pour tout $t > t_0$ grand, on a :

$$\gamma \|\vec{u}(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2(\gamma + 1)E(\vec{u}(t_0)) - K_0(u(t))$$

  et donc la trajectoire est bornée et il existe $t_n \to +\infty$ t.q. $K_0(u(t_n)) \to 0$.

- Cas (B) : on ne peut avoir $K_0(u(t)) \geq \kappa_0 > 0$ for all $t \geq t_0$. En effet, il existe $C > 0$ t. q.

$$y_t(t) = (u(t), u_t(t)) + \alpha \|u(t)\|^2_{L^2} \geq -C$$

  et

$$y_t(t) - y_t(t_0) = \int_{t_0}^{t} y_{tt}(s)ds \leq \int_{t_0}^{t} \|u_t(s)\|^2_{L^2} ds - \kappa_0(t - t_0)$$
$$\leq (2\alpha)^{-1}[E(\vec{u}(t_0)) - E(\vec{u}(t))] - \kappa_0(t - t_0)$$

Etape 2 : Comment obtenir la convergence de la suite $\vec{u}(t_n)$

- $E(\vec{u}(t_n)) \leq E(\vec{u}(0))$, $K_0(u(t_n)) \geq -C$ impliquent que $\vec{u}(t_n)$ est borné dans $\mathcal{H}$. A sous-suite près $\vec{u}(t_n) \rightharpoonup (\varphi_0, \varphi_1)$ dans $\mathcal{H}$.
- Il existe $T > 0$ t.q. $\vec{u}_n(t) = \vec{u}(t + t_n)$ est borné dans $L^\infty((-T, T); \mathcal{H})$, uniform. en n. Notons que $\vec{u}_n(t)$ est solution de

$$\Box u_n + 2\alpha\partial_t u_n + u_n - f(u_n) = 0, \ (u_n(x, 0), u_{nt}(x, 0)) = \vec{u}(t_n) \in \mathcal{H}.$$

- $\partial_t u_n(t) \to 0$ dans $L^2((-T, T); L^2)$.
- On remarque que, pour $s, t \in [-T, T]$,

$$\begin{aligned} \|u_n(s) - u_n(t)\|_{L^2}^2 &\leq |t - s| \int_{s+t_n}^{t+t_n} \|\partial_t u(\sigma)\|_{L^2}^2 \, d\sigma \\ &\leq 2T \int_{t_n - T}^{t_n + T} \|\partial_t u(\sigma)\|_{L^2}^2 \, d\sigma \to 0 \text{ si } n \to +\infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Par interpolation, pour tout $q \in (2, 6)$, il existe $b \in (0, 1)$ t.q.,

$$\|u_n(t) - u_n(s)\|_{L^q} \leq c|t - s|^{\frac{1-b}{2}} \left(\int_{t_n - T}^{t_n + T} \|\partial_t u(\sigma)\|_{L^2}^2 \, d\sigma\right)^{\frac{1-b}{2}} \tag{8}$$

- L'injection de $H^1_{rad} \hookrightarrow L^q, 2 < q < 6$ est compacte.
- On choisit $2 < p_0 < p_1 < 6$ de manière "adéquate", p_0 proche de 2 et p_1 proche de 6 et on pose $X = L^{p_0}(\mathbb{R}^3) \cap L^{p_1}(\mathbb{R}^3)$.
- On a montré que la famille $(u_n(t))_n$ est équicontinue dans $C^0([-T, T], X)$. D'autre part, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}, t\in[-T,T]} u_n(t) \subset$ compact de X.

  Par le théorème d'Ascoli, $u_n(t)$ est relativement compacte et, à sous-suite près, converge dans $C^0((-T, T); X)$, vers $\vec{v}(t) \equiv S_\alpha(t)(\varphi_0, \varphi_1)$.
- On montre que $v_t(t) \equiv 0$. Donc, $\varphi_1 = 0$ and $\vec{v} = (\varphi_0, 0)$ est un équilibre.
- On montre que $\lim_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2_{H^1} = \|\varphi_0\|^{p+1}_{L^{p+1}}$
- φ_0 équilibre $\rightsquigarrow$ $\|\varphi_0\|^2_{H^1} = \|\varphi_0\|^{p+1}_{L^{p+1}}$.
- Les deux égalités ci-dessus entraînent que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n(0)\|^2_{H^1} = |\varphi_0\|^2_{H^1} \ .$$

- Puisqu'en outre, $u(t_n)$ converge faiblement vers φ_0 dans $H^1(\mathbb{R}^3)$, on a montré que $u(t_n) \to \varphi_0$ fortement dans H^1 .

Etape 3 : Convergence forte de $\partial_t u(t_n) \to 0$ dans L^2

On rappelle que $\partial_t u_n \to 0$ dans $L^2((0,T);L^2)$. Soit $u_n^* = u_n - \varphi_0$.

$$\Box u_n^* + u_n^* = |u_n|^{p-1}u_n - |\varphi_0|^{p-1}\varphi_0 - 2\alpha\partial_t u_n \equiv g_n$$

$$(u_n^*, \partial_t u_n^*)\,|_{t=0} = (u_n(0) - \varphi_0, \partial_t u_n(0)).$$

On pose $u_n^* = u_n - \varphi_0 = w_n + v_n$, où w_n est solution de

$$\Box w_n + w_n = g_n, \quad (w_n, \partial_t w_n)\,|_{t=0} = (u_n(0) - \varphi_0, 0).$$

et où v_n est la solution de

$$\Box v_n + v_n = 0, \quad (v_n, \partial_t v_n)\,|_{t=0} = (0, \partial_t u_n(0)).$$

En utilisant les inégalités de Strichartz, la convergence de $u_n - \varphi_0$ vers 0 in $C^0((-T,T);L^q)$, $2 < p_0 < q < p_1 < \frac{2d}{d-2}$ et le caractère sous-critique de (1), on obtient

$$\|g_n\|_{L^1((-T,T);L^2)} \to 0, \text{ et } \|(w_n, \partial_t w)\|_{C^0((-T,T);\mathcal{H})} \to 0.$$

Suite

Rappel : On a $\partial_t v_n = \partial_t u_n - \partial_t w_n$ et donc

$$\|\partial_t v_n\|_{L^2((-T,T),L^2)} \leq \|\partial_t u_n\|_{L^2((-T,T),L^2)} + \|\partial_t w_n\|^2_{L^2})dt \to 0. \quad (9)$$

Lemme (Inégalité d'observation élémentaire pour KG linéaire)

Pour tout $\tau > 0$, *on a*

$$\|\partial_t v_n(0)\|^2_{L^2} \leq c(\tau) \int_{-\tau}^{\tau} \|\partial_t v_n\|^2_{L^2} dt$$

Du lemme et de l'inégalité (9), on déduit que

$$\|\partial_t u_n(0))\|^2_{L^2} \leq C_T \int_{-T}^{T} (\|\partial_t u_n\|^2_{L^2} + \|\partial_t w_n\|^2_{L^2})dt \to 0.$$

Dorénavant, on note l'équilbre obtenu $(\varphi_0, 0) \equiv (Q^*, 0)$.

Analyse au voisinage de l'équilibre $(Q^*, 0)$

On linéarise l'équation KGNL en $(Q^*, 0)$ (où $f(u) = |u|^{p-1}u$)

$$w_{tt} + 2\alpha w_t + L_+ w = 0, \tag{10}$$

et où $L_+ = -\Delta + Id - f'(Q^*)$ l'opérateur elliptique linéarisé. On a

- Q^* décroît exponentiellement à l'infini.
- L_+ a *un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie (valeurs propres simples dans l'ensemble des fonctions radiales)*
- *spectre continu* $\sigma_{cont}(L_+) = \sigma_{cont}(-\Delta + 1) = [1, +\infty)$
- 0 *peut être une valeur propre de multiplicité* 1 *au plus (dans l'ensemble des fonctions radiales functions).*

Soit $v \in \mathrm{Ker}(L_+)$. Alors $\varphi(r) = rv(r)$ satisfait à $\varphi(0) = 0$ et à

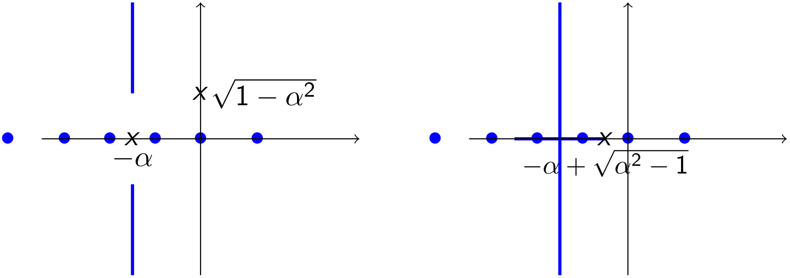
$$-\varphi''(r) + \varphi(r) - f'(Q^*)\varphi(r) = 0.$$

Cette EDO a une base de solutions $\varphi^{\pm}$ de comportement asymptotique $e^{\pm r}$ à l'infini. Seul φ^- peut appartenir au noyau, ce qui est le cas ssi $\varphi^-(0) = 0$

On récrit l'équation KGNL au voisinage de $(Q^*, 0)$ sous forme d'un système $\vec{w}(t) = (w, w_t)(t)$,

$$\vec{w}_t = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -L_+ & 2\alpha Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N(Q^*, w) \end{pmatrix} = A_\alpha \vec{w} + N(\vec{w})$$

Spectre de A_α : $\sigma(A_\alpha) = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda}, \lambda \in \sigma(L_+)$.



$0 < \alpha < 1$ $\qquad\qquad$ $1 < \alpha$

Trois régions distinctes dans le spectre

$$\sigma^u(A_\alpha) = \{z \in \sigma(A_\alpha);\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$$
$$\sigma^s(A_\alpha) = \{z \in \sigma(A_\alpha);\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$$
$$\sigma^c(A_\alpha) = \{z \in \sigma(A_\alpha);\ \mathrm{Re}\, z = 0\}$$

Si $Q^* = Q$ (l'état fondamental), $\mathcal{H}^c_{rad} = \{0\},\ \dim(\mathcal{H}^u_{rad}) = 1$.
Si $Q^* = 0$ (solution triviale), $\mathcal{H}^c_{rad} = \{0\} = \mathcal{H}^u_{rad}$.

On a :

$$(H^1 \times L^2)_{rad} = \mathcal{H}_{rad} = \mathcal{H}^u_{rad} \oplus \mathcal{H}^c_{rad} \oplus \mathcal{H}^s_{rad}.$$

Problème de l'existence de la valeur propre 0.

Variétés invariantes pour KGNL avec amortissement

Théorème

- *Cas hyperbolique $\mathcal{H}^c_{rad} = \{0\}$. $\exists !$variétés stable et instable locales W^s, W^u, tangentes en $(Q^*, 0)$ à $\mathcal{H}^s_{rad}$, $\mathcal{H}^u_{rad}$. On a des propriétés d'invariance locales*

$$W^s = \{\|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}} < r \mid \vec{u}(t) \to (Q^*, 0) \text{ exp. quand } t \to \infty\}$$
$$W^u = \{\|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}} < r \mid \vec{u}(t) \to (Q^*, 0) \text{ exp. quand } t \to -\infty\}$$

- *cas non hyperbolique : $dim(\mathcal{H}^c_{rad}) = 1$. Il existe des variétés centrales, centrales (ins)stables* **localement invariantes** *W^c, W^{cs}, W^{cu}, tangentes en $(Q^*, 0)$ à $\mathcal{H}^c_{rad}$, $\mathcal{H}^{cs}_{rad}$ et $\mathcal{H}^{cu}_{rad}$.*

Un résultat de convergence (Brunovský-Poláčik, 1997)

Théorème

Soit Φ un système discret, ayant 0 comme point fixe ($\Phi(0) = 0$). On note X^u, X^s et X^c les ensembles linéaires instable, stable et central du linéarisé en 0. Supposons que X^{cu} soit de dimension finie et que le point fixe 0 soit d-stable pour $\Phi\,|_{W^c_{loc}}$. Soit x_0 un point t.q. $0 \in \omega(x_0)$. Alors, $\Phi^n(x_0) \to 0$ ou bien $\omega(x_0) \cap W^u_{loc}(0) \neq \{0\}$.

Définition

0 *est d-stable pour l'application $\Phi\,|_{W^c_{loc}}$, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ t.q., $\forall y \in W^c_{loc}(0)$ avec $\|y\|_X \leq \eta$, $\|\Phi^n(y)\|_X \leq \varepsilon$,* $\forall n = 0, 1, 2, \dots$

Corollaire (Hale et GR, (1992))

Soit x_0 un point t.q. $\omega(x_0) \subset Fix(\Phi)$ et que $0 \in \omega(x_0)$. Si $\dim X^c = 1$ *et si la trajectoire $\Phi^n(x_0)$, $n = 1, 2, 3\dots$ est relativement compacte, alors $\omega(x_0) = \{0\}$.*

Résultats plus anciens d'Aulbach (1984)

Difficulté : on ne sait même pas si la trajectoire est bornée !

Partie II : Amortissement $\alpha(t) > 0$, s'annulant à l'infini

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} + 2\alpha(t)u_t - \Delta u + u - |u|^{p-1}u = 0, \ x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0 \\
&(u(x,0), u_t(x,0)) = (u_0(x), u_1(x)) \in \mathcal{H},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Amortissement variable : $\alpha(t) > 0$, $\alpha(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ et $\int_0^{+\infty} \alpha(s)ds = +\infty$.

Exemple de base : $0 \leq a < 1$: effective ($a \geq 1$: non-effectif).

$$\alpha(t) = (1+t)^{-a} \ , \quad t \geq 0.$$

1) $\Sigma_\alpha(t) \rightsquigarrow$ processus $\Sigma_\alpha(t,\tau)$, $S_\alpha(t) \rightsquigarrow$ processus $S_\alpha(t,\tau)$
2) Taux de décroissance (P. Martinez, 2000, J. Wirth, 2006,...) : $\exists c_0 > 0, c_1 > 0$ t.q., pour $t \geq \tau$,

$$\|\Sigma_\alpha(t,\tau)\vec{u}_0\|_{\mathcal{H}} \leq c_0(\exp -2c_1 \int_\tau^t \alpha(s)ds)\|\vec{u}_0\|_{\mathcal{H}}$$

Résultats plus anciens :

- Cabot, Engler, Gadat (2009) ; Haraux - Jendoubi (2013) : EDO.
- Nishihara (2009), Cabot et Frankel (2012) : cas défocalisant.

Convergence

Soit $1 \leq d \leq 6$ and $1 < p < p^*$, où ($p^* = \frac{d+2}{d-2}$ if $d \geq 3$, $p^* = 5$ si $d = 3$).

Théorème (Existence d'un équilibre dans l'ensemble ω-limite)

Soit $0 \leq a \leq 1$ dans l'exemple de base. Pour tout $r > 0$ et toute solution $\vec{u}(t)$ sur $[0, +\infty)$, il existe une suite de temps $t_n \to +\infty$ et un équilibre $(Q^*, 0)$ t. q. $\vec{u}(t_n) \to (Q^*, 0)$ dans $\mathcal{H}_{rad}$ et $\int_{t_n-r}^{t_n+r} \|u_t(s)\|_{L^2}^2 ds \to 0$ quand $n \to \infty$.

Théorème (Convergence vers $(Q^*, 0)$, (B.R.S., 2017))

Soit $0 \leq a < 1/3$. Si $\vec{u}(t)$ est une solution globale sur $[0, +\infty)$, alors $\vec{u}(t)$ converge vers $(Q^*, 0)$ dans $\mathcal{H}_{rad}$, quand $t \to +\infty$. En outre, il existe un temps $t_0 > 0$ t.q., pour $t \geq t_0$,

$$\|\vec{u}(t) - (Q^*, 0)\|_{\mathcal{H}} \leq c_0(t_0) \exp\left(- c_1(1+t)^{1-a}\right) , \qquad (12)$$

où $c_0(t_0) > 0$ est une constante qui ne dépend que de t_0.

Preuve assez délicate quand $d = 3$ et $4 < p < 5$

Quelques ingrédients de la preuve

1) **Inégalité de Łojasiewicz-Simon** (1983)
Il existe $\rho_0 > 0$ and $C_0 > 0$ t.q., pour tout $v \in B_{H^1}(Q^*, \rho_0)$,

$$|E(v,0) - E(Q^*,0)| \leq C_0 \| -\Delta v + v - f(v)\|^2_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \ .$$

On rappelle que, dans le cas radial, le noyau $-\Delta + I - f'(Q^*)$ est au plus de dimension 1.

2) On introduit la fonctionnelle H :

$$H(t) = E(\vec{u}(t)) - E(Q^*,0) + \frac{\varepsilon}{(1+t)^{a\nu}} \langle -\Delta u + u - f(u), u_t \rangle_{H^{-1}}(t),$$

où $\varepsilon > 0$ est petit et où $\nu > 1$ est bien choisi, proche de 1.

Suite (cas $3 < d \leq 6$ ou $d = 3$, $1 < p \leq 4$)

On montre que, sur des intervalles $t_0 \leq t \leq t_1$ où $\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq R_1$ où $R_1 > 0$ est grand, H est décroissante. En effet,

$$H'(t) = -2\alpha\|u_t\|_{L^2}^2 + \ldots + \frac{\varepsilon}{(1+t)^{a\nu}}\langle -\Delta u_t + u_t - f'(u)u_t, u_t\rangle_{H^{-1}}(t)$$

Dans les cas ci-dessus, on a l'inégalité :

$$|\langle f'(u)u_t, u_t\rangle_{H^{-1}}| \leq C\|u_t\|_{L^2}^2(1 + \|u\|_{H^1}^{p-1}) \tag{13}$$

En utilisant (13), on obtient,

$$H'(t) \leq -\frac{(2-\varepsilon C(R_1))}{(1+t)^a}\|u_t\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{4(1+t)^{a\nu}}\|-\Delta u + u - f(u)\|_{H^{-1}}^2 \leq 0 \tag{14}$$

On a trois possibilités :

1. $H(t) > 0$ sur $[t_0, t_1]$,
2. $H(t) \leq 0$ sur $[t_0, t_1]$,
3. $H(t) > 0$ sur $[t_0, t_2]$ et $H(t) \leq 0$ sur $[t_2, t_1]$ où $t_0 < t_2 < t_1$.

Le cas $H(t) > 0$ on $[t_0, t_1]$

1) Aussi longtemps que $\|\vec{u}(t) - (Q^*, 0)\|_{\mathcal{H}} \leq \rho_0$ (sur un intervalle maximal $[t_0, t_0^*]$), on peut utiliser l'inégalité de L.S. pour obtenir

$$H(t) \leq C_1(\| - \Delta u(t) + u(t) - f(u(t))\|^2_{H^{-1}} + \|u_t(t)\|^2_{L^2}) \qquad (15)$$

2) Les estimations (14) et (15) impliquent que, pour $t_0 \leq t \leq t_0^*$,

$$H'(t) + \frac{C_2 \varepsilon}{(1+t)^{a\nu}} H(t) \leq 0. \qquad (16)$$

Les autres cas où $H(t)$ peut devenir négatif sont plus délicats à traiter. Mais, en fait, à la fin de la preuve, on montre que ces cas n'arrivent pas.

Conclusion : $\vec{u}(t)$ reste proche de $(Q^*, 0)$ pour toujours et tend vers $(Q^*, 0)$ au taux $\exp(-Ct^{1-a})$.